

# ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

K.W. FRITZ KOHLRAUSCH UND HANS THIRRING

GRAZ

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN

GRAZ

4. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

MIT 70 ABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM MAI 1951)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1951

## Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen

**Allgemeines.** Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht gerade an demselben Problem arbeiten. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift ist ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle. Nur den wenigsten ist es gegeben, auf den ersten Anhieb schon das Optimum an Aufbau, Gliederung und Ausdruck zu erreichen. Meist wird dies erst nach mehrfachem Umarbeiten gelingen. Diese Mühe muß der Autor auf sich nehmen. Erstens schon in seinem eigenen Interesse, um nicht monatelange Arbeit durch unzweckmäßige Darstellung der Ergebnisse zu entwerfen; zweitens im Interesse der Drucklegung, da nachträgliche stilistische Verbesserungen und Veränderungen so viel Mehrarbeit für den Setzer bedeuten, daß sie, selbst wenn die Kosten dem Autor angerechnet werden, bei den heutigen Verhältnissen als untragbar bezeichnet werden müssen. Eben diese Verhältnisse machen es den Herausgebern zur unabweislichen Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

**Manuskripte** sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5, zu richten.

**Umfang:** Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

**Äußere Form:** Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

**Titelkopf:** Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter: „Mit . . . Abbildungen.“

*Fortsetzung auf der III. Umschlagseite*

### 4. Band/4. Heft

### Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>Thirring, W.</b> Bericht über die neuen Entdeckungen im Wasserstoffspektrum . . . . .	325
<b>Bergmann, O.</b> Zum Kernphotoeffekt an Beryllium . . . . .	338
<b>Wieninger, L.</b> Über die Reichweite von Polonium- $\alpha$ -Strahlen in einigen Alkalihalogenid-Kristallen (NaCl, KCl, KBr und KJ) . . . . .	355
<b>Lühl, F.</b> Ferromagnetische Eigenschaften halboxydischer Eisen- und Eisen-Kobalt-Pulver . . . . .	360
<b>Urban, P., und F. Schwarzl.</b> Die Theorien der Teilchen mit höherem Spin . . . . .	380
<b>König, H. W.</b> Materielle und quantenhafte Eigenschaften elektromagnetischer Wellenfelder . . . . .	405
<b>Herzog, R. F. K.</b> Neue Erkenntnisse über die elektronenoptischen Eigenschaften magnetischer Ablenkfelder . . . . .	431
<b>Roesler, F. C.</b> Überlegungen zur Ehrenhaftschen Magneto-Photophorese . . . . .	445
<b>Rieder, W., H. Müller und E. Broda.</b> Zum Szilard-Chalmers-Effekt mit schnellen Neutronen . . . . .	457
<b>Ehrenhaft, F.</b> Über die Photophorese, die wahre magnetische Ladung und die schraubenförmige Bewegung der Materie in Feldern. Erster Teil . . . . .	461
<b>Ehrenhaft, F., und F. Stockinger.</b> Der Magnet als Diakriter von Säure und Base . . . . .	489
<b>Smekal, A.</b> Bericht über die Österreichische Physiker-Tagung in Graz und die Gründung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft . . . . .	497
<b>Buchbesprechungen</b> . . . . .	509



# Bericht über die neuen Entdeckungen im Wasserstoffspektrum.

Von

**Walter Thirring.**

Institute for Advanced Studies, Dublin.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 8. November 1949.)

## **Zusammenfassung.**

Es wird ein Bericht über die jüngsten Entdeckungen im Wasserstoffspektrum gegeben und die Deutungsmöglichkeiten werden diskutiert.

## **1. Einleitung.**

Das Wasserstoffatom hat schon für manche Theorie das Probeobjekt und den Prüfstein gebildet, da hier ein theoretisch besonders einfacher Fall vorliegt. Viele Effekte bei Spektren anderer Elemente, wenngleich sie experimentell mit aller Schärfe zu bestimmen sind, liefern keinen zwingenden Schluß über die Gültigkeit einer Theorie, da zu viele theoretisch nicht berechenbare Faktoren mit im Spiel sind. Nicht so das Wasserstoffspektrum, da das Wasserstoffatom einen selten idealen Prototyp eines Zweikörperproblems bildet. Die verfeinerte Meßtechnik der Radiospektroskopie, welche die Genauigkeit der gewöhnlichen Spektroskopie um einige Zehnerpotenzen übertrifft, hat nun über das Wasserstoffspektrum seit Kriegsende eine Reihe neuer experimenteller Daten gebracht, worüber in dieser Arbeit referiert werden soll. Da die ganze neue Entwicklung der Quantentheorie in diesen Versuchen ihre experimentelle Stütze findet, wird ihnen allenthalben die größte Bedeutung beigemessen.

## **2. Das Wasserstoffatom nach der Diracschen Elektronentheorie.**

Die Energieniveaus eines Elektrons im Coulombfeld des Kernes werden nichtrelativistisch roh durch das bekannte *Balmersche* Termschema gegeben. Die relativistischen Korrekturen bestehen nach der *Dirac*-Gleichung in erster Näherung aus zwei Größen:

Die erste rührt von der Massenveränderung mit der Geschwindigkeit her und bewirkt eine Lockerung der Bindung, da sie die kinetische Energie vergrößert. Die zweite Korrektur rührt von der Wirkung des elektrischen Feldes auf das magnetische Moment des Elektrons her und kann beiderlei Vorzeichen haben. Beide Terme ergeben zur nichtrelativistischen Energie addiert:

$$E = -\frac{Ry Z^2}{n^2} - \frac{Ry \alpha^2 Z^4}{n^3} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right). \quad (1)$$

Dies stellt den Anfang einer Entwicklung nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten der exakten *Sommerfeldschen* Feinstrukturformel dar.

$$E = mc^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}} \right)^2 \right\}^{-1/2} - mc^2. \quad (2)$$

Unsere Bezeichnung ist die übliche,  $Ry$  ist die der *Rydberg*-Konstanten entsprechende Energie  $\frac{1}{2} \frac{e^4 m}{\hbar^2}$ . Während die nichtrelativistische Energie aller  $2n^2$  Zustände gleicher Hauptquantenzahl  $n$  dieselbe ist, wird diese Entartung durch die relativistischen Korrekturen teilweise aufgehoben. Es haben jetzt nur mehr Zustände gleicher Hauptquantenzahl  $n$  und gleichen Gesamtdrehimpulses  $j$  dieselbe Energie. Demgemäß unterteilt sich jedes der nichtrelativistischen Energieniveaus in  $n$  getrennte Terme, da die Anzahl der möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses gleich der Hauptquantenzahl ist. Abgesehen von der Entartung, die von der Orientierungsmöglichkeit des Gesamtdrehimpulses herrührt, besteht jeder Term noch aus Zuständen, deren Bahndrehimpulse sich um 1 unterscheiden und die antiparallelen Spin haben. Zufolge der Kleinheit der Feinstrukturkonstanten ist die Feinstrukturaufspaltung der Wasserstoffenergieniveaus relativ sehr gering. Maßstäblich läßt sich das gar nicht zeichnen, wir müßten die *Balmer*-Terme mit einer 50.000fach vergrößernden Lupe betrachten, um die Details der Feinstruktur erkennen zu können. (Abb. 1.) Diese Effekte sind natürlich am deutlichsten bei Zuständen großer Elektronengeschwindigkeit, das heißt kleiner Hauptquantenzahl  $n$ , ausgeprägt.

Die Wirkung des Kernes auf das Elektron wird jedoch durch das *Coulomb*-Potential allein nicht genügend beschrieben, da das magnetische Moment des Kernes ein magnetisches Feld erzeugt. Dieses hebt zunächst die Richtungsentartung auf, indem Zustände gleichen Gesamtdrehimpulses verschiedene Energie erhalten, je nach der Einstellung des Gesamtdrehimpulses zum



Kernmoment. Es liefert jedoch auch eine Unterscheidung von Zuständen gleichen Gesamtdrehimpulses und verschiedenen Bahndrehimpulses. Dies kommt von der kurzen Reichweite dieser Kräfte, welche nur merklich auf solche Zustände wirken, in welchen das Elektron eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit in unmittelbarer Nähe des Kernes besitzt. Die Wellenfunktion für das Elektron verschwindet nun aber an der Stelle des Kernes für alle Zustände mit Ausnahme der Zustände verschwindenden Bahndrehimpulses. Infolge des schwachen magnetischen Momentes

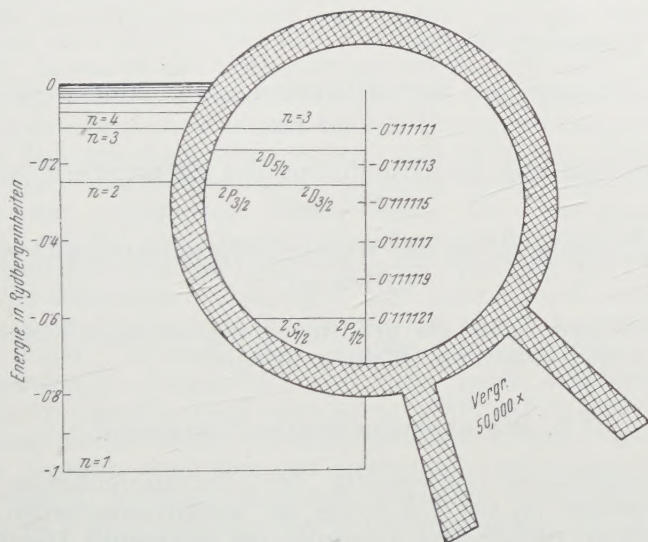


Abb. 1. Die Balmer-Niveaus. Das Niveau  $n=3$  wird mit einer 50.000fach vergrößernden Lupe betrachtet, wodurch die Feinstruktur sichtbar wird.

wird sich die Hyperfeinstruktur beim Wasserstoff überhaupt nur bei diesen Zuständen bemerkbar machen. Dies gilt nicht für Atome höherer Kernladungszahl, da hier auch die Elektronen mit Bahndrehimpuls hinreichend nahe an den Kern herankommen, um sein magnetisches Moment zu spüren. Die  $S$ -Terme (Bahndrehimpuls = 0) werden in ein Dublett aufgespalten, je nachdem der Spin des Elektrons parallel oder antiparallel dem Kernspin ist. Quantitativ läßt sich der Einfluß des Kernes leicht durch Störungsrechnung bestimmen. Da alle diese Rechnungen als Näherungen nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten aufzufassen sind, kann man sie mit den nichtrelativistischen Eigenfunktionen der *Schrödinger*-Gleichung ausführen; der Unterschied gegenüber den exakten Eigenfunktionen der *Dirac*-Gleichung würde sich erst in der nächsten Näherung bemerkbar machen. Wir wollen dies auch stillschweigend in allen ähnlichen Rechnungen im Laufe dieser Arbeit tun.

Für die Hyperfeinstruktur eines *S*-Zustandes erhält man so:

$$\Delta E = \frac{4}{3} \left( \frac{2I+1}{I} \right) \mu_n \mu_0 |\psi_0|^2. \quad (3)$$

*I* bedeutet hier den Kernspin,  $\mu_0$  und  $\mu_n$  das magnetische Moment von Elektron und Kern,  $|\psi_0|^2$  den Betrag der Wellenfunktion an Stelle des Kernes. Wir wollen noch einige numerische Werte geben, wobei wir als geeignete Einheit die entsprechende Wellenzahl, in  $\text{cm}^{-1}$  gemessen, wählen, also die Anzahl der Wellen pro Zentimeter angeben, welche die der Energiedifferenz entsprechende Lichtwelle besitzt.

Differenz der *Balmer*-Niveaus  $n=2$  und  $n=3$   
 $15.233,01 \text{ cm}^{-1}$ .

Feinaufspaltung des Grundterms der *Balmer*-Serie  $n=2$   
 $0,365 \text{ cm}^{-1}$ .

Hyperfeinaufspaltung des Wasserstoffgrundzustandes  $n=1$   
 $0,0169 \text{ cm}^{-1}$ .

Man sieht also, daß ein größenordnungsmäßiger Unterschied zwischen den einzelnen Effekten besteht.

### 3. Die experimentellen Tatsachen.

Die glänzende Bewährung der *Sommerfelds*chen Feinstrukturformel an der Erklärung der spektroskopischen Daten bildete einen der größten Triumphe der *Bohrs*chen Theorie und später der *Dirac*-Gleichung. Wenngleich man auch nicht alle der möglichen Linien spektroskopisch auffinden konnte, weil ihre Intensitätsunterschiede zu groß sind, war die Übereinstimmung zwischen den vorhandenen Linien und den berechneten Werten vorzüglich. Ein genauer Bericht über den Stand der Dinge bis 1930 ist in dem Buch von *Sommerfeld* gegeben. Zwischen 1930 und 1940 ergaben neue amerikanische Messungen jedoch Abweichungen bis zu 8% von der Feinstrukturformel<sup>1)</sup>, während deutsche Arbeiten Übereinstimmung im Rahmen der Beobachtungsfehler behaupteten<sup>2)</sup>. Da es sich jedoch um Effekte an der Grenze der Beobachtungsmöglichkeit handelte, konnten aus den amerikanischen Abweichungen noch keine folgenschweren Schlüsse gezogen werden. *Pasternack*<sup>3)</sup> schlug vor, die amerikanischen Resultate durch eine Verschiebung des  $^2S_{1/2}$ -Terms um  $0,03 \text{ cm}^{-1}$  zu erklären. Während sich der Term  $n=2$  nach

<sup>1)</sup> W. V. Houston, P. R. 51, 446 (1937); Williams, P. R. 54, 558 (1938).

<sup>2)</sup> Maria Heyden, Z. Physik 106, 499 (1937).

<sup>3)</sup> Pasternack, P. R. 54, 1113 (1937).



der Feinstrukturformel nur in zwei getrennte Niveaus aufspaltet, würde er demnach noch weiter unterteilt werden. Nach der Feinstrukturformel hätten wir den Term mit Gesamtdrehimpuls  $3/2$ , Bahndrehimpuls 1 und Spin parallel dazu ( ${}^2P_{3/2}$ ), ferner den Term mit Gesamtdrehimpuls  $1/2$ , welcher aus dem Zustand Bahndrehimpuls 1 und Spin antiparallel dazu ( ${}^2P_{1/2}$ ) und dem energiegleichen Zustand mit Bahndrehimpuls 0 ( ${}^2S_{1/2}$ ) besteht. Letzterer Zustand würde nun nach *Pasternack* gegenüber dem ersteren etwas weniger stark gebunden sein, also nicht dieselbe Energie besitzen.

Nach dem Kriege war das Problem in ein neues Stadium gerückt, da durch die Verfeinerung der Radartechnik während des Krieges die Radiospektroskopie ein ungeheuer wirkungsvolles Instrument zur Bestimmung von Energieniveaus geworden ist. Die Methode besteht darin, daß man Atome in einem Atomstrahl durch Hochfrequenzschwingungen anregt und dann die Anzahl der angeregten Atome mißt. Die Anregung wird natürlich nur bei einer bestimmten Frequenz möglich sein, wenn die Energiedifferenz der entsprechenden Zustände zur Frequenz in der *Einsteinschen* Beziehung  $E = h\nu$  steht. Durch Ausbildung der Zentimeterwellentechnik war man nun gerade in jenes Gebiet vorgedrungen, welches den feinen Energiedifferenzen der Hyperfeinstruktur entspricht, und hatte damit Anschluß an die gewöhnliche Spektroskopie gewonnen. Während die gewöhnliche Spektroskopie bei Wellenzahldifferenzen unter  $1\text{ cm}^{-1}$  unsicher zu werden beginnt, setzt hier das Gebiet der Zentimeterwellen ein und gestattet, die Meßbarkeitsgrenze kleiner Energiedifferenzen um etliche Zehnerpotenzen weiter vorzuschieben. Die Frage der Verschiebung des  ${}^2S_{1/2}$ -Zustandes im Wasserstoff wurde von *Lamb* und *Retherford*<sup>4)</sup> in ihrem berühmten Experiment 1947 in Angriff genommen. Ihre Anordnung ist die folgende: Atomarer Wasserstoff wird zunächst mit einem Elektronenstrahl bombardiert, wodurch einige Atome von dem Grundzustand zu dem  ${}^2S_{1/2}$ -Zustand angeregt werden. Dieser Zustand ist metastabil, da die Auswahlregel  $\Delta l = -1$  ( $l$  = Bahndrehimpuls) einen direkten Übergang in den Grundzustand verbietet. Indem man nun durch Zentimeterwellen der entsprechenden Frequenz einen Übergang in einen der  ${}^2P$ -Zustände hervorruft, kann man Zerfall der angeregten Zustände ermöglichen. Auf diese Weise ist eine sehr genaue Bestimmung der Lage des  ${}^2S_{1/2}$ -Niveaus im Vergleich zu den  ${}^2P$ -Niveaus möglich. Das Resultat war eine vollständige Bestätigung der *Pasternackschen* Hypothese, daß der  ${}^2S_{1/2}$ -Term gegenüber dem  ${}^2P_{1/2}$ -Term im Energieschema nach oben verschoben ist. Verfeinerte spätere Messungen<sup>5)</sup> ergaben den Wert  $\Delta E = 0,0351\text{ cm}^{-1}$ .

<sup>4)</sup> *Lamb, Retherford*, P. R. 72, 241 (1947).

<sup>5)</sup> *Lamb*, P. R. 75, 1325 (1949).

Genau derselbe Wert ergab sich für schweren Wasserstoff, während dasselbe Phänomen bei Helium mit direkten optischen Methoden festgestellt werden konnte<sup>6)</sup>. Dieser Effekt ist nicht mit der Hyperfeinstruktur zu verwechseln, welche eine Verdoppelung des  $^2S_{1/2}$ -Niveaus symmetrisch zu dem  $^2P_{1/2}$  ergeben würde, während es sich bei dem *Lamb-Shift* um eine Verschiebung nach oben handelt. Auch ist der *Lamb-Shift* weit größer als die Hyperfeinstrukturaufspaltung. In Abb. 2 haben wir die

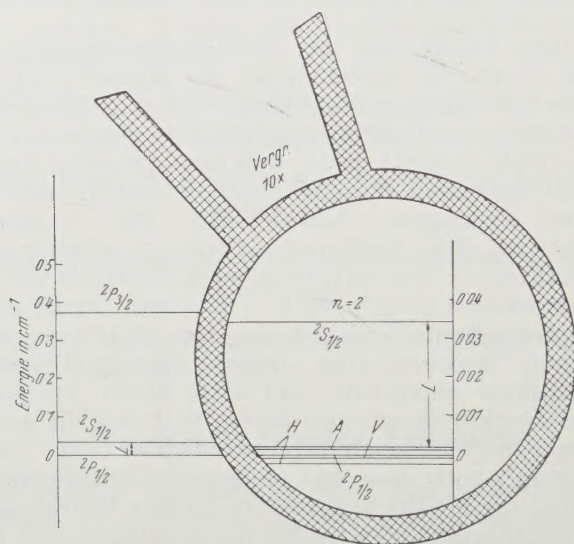


Abb. 2. Das Dublett  $n=2$ . Das untere Niveau wird mit einer 10fach vergrößerten Lupe betrachtet, wodurch folgende Aufspaltungen sichtbar werden:  $L$  = *Lamb-Shift*;  $H$  = Hyperfeinstruktur;  $V$  = Verschiebung durch Vakuumpolarisation;  $A$  = Verschiebung durch Ausdehnung des Kerns.

Aufspaltung des Terms  $n=2$  gezeichnet, wobei wir wieder eine Lupe benötigen, um die Hyperfeinstruktur neben dem *Lamb-Shift* zu sehen. Die Hyperfeinstruktur ist natürlich am größten im Grundzustand  $n=1$ , wo sie auch von *Rabi* und Mitarbeitern<sup>7)</sup> entdeckt wurde. Es ergab sich jedoch ein Wert, welcher den nach Formel (3) berechneten  $0,06\%$  übertraf. Man muß daher annehmen, daß man für eine der in (3) vorkommenden Konstanten nicht den richtigen Wert besitzt. Man vermutet, daß das magnetische Moment des Elektrons einen etwas größeren Wert als ein *Bohrsches* Magneton besitzt, da auch andere

<sup>6)</sup> Mack, Austern, P. R. 72, 972.

<sup>7)</sup> Kellog, Rabi, Zacharias, P. R. 50, 472 (1936); Kellog, Rabi, Ramsey, P. R. 50, 728 (1936); Kush, Millman, Rabi, P. R. 60, 91; Nafe, Nelso, Rabi, P. R. 72, 914.



Gründe dafür sprechen<sup>8)</sup>. Wir wollen uns in der weiteren Diskussion nicht mit dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons beschäftigen, sondern uns mit einer Durchmusterung der möglichen Ursachen des *Lamb-Shifts* begnügen. Wegen der außergewöhnlichen Bedeutung dieser Experimente für die Theorie wurden sie an etlichen Stellen wiederholt und die Resultate bestätigt<sup>9)</sup>.

#### 4. Diskussion der Deutungsversuche.

##### A. Abweichungen vom Coulombfeld.

Eine Verschiebung der *S*-Terme nach oben deutet zunächst auf eine abstoßende Kraft mit kurzer Reichweite hin. Abstoßend, da es sich um eine Lockerung der Bindung handelt, kurze Reichweite, da nur die *S*-Terme verändert werden. Man könnte sich vorstellen, daß der Kern keine punktförmige Ladungssingularität ist, sondern daß es sich um eine endliche Ladungsverteilung handelt. Eine ausgeglättete Ladungsverteilung wäre etwa durch folgende Dichte gegeben:

$$\rho = \frac{e}{\pi r_0^3} \exp\left(\frac{-2r}{r_0}\right), \quad \int \rho d\tau = e. \quad (4)$$

Das durch sie erzeugte Potential berechnet sich nach bekannten Formeln zu:

$$V = \frac{e}{r_0} \left[ \frac{1}{x} (1 - e^{-2x}) - e^{-2x} \right], \quad x = \frac{r}{r_0}. \quad (5)$$

Die Abweichung vom *Coulomb*-Potential stellt tatsächlich eine abstoßende Kraft mit kurzer Reichweite dar. Wenn wir ihren Einfluß durch Störungsrechnung berechnen, werden wir qualitativ den richtigen Effekt erhalten. Für die Verschiebung des Grundzustandes erhalten wir:

$$\Delta E = \int V_s |\psi_{1s}|^2 d\tau$$

$$V_s = -e \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right] e^{-\frac{2r}{r_0}}, \quad \psi_{1s} = \left( \frac{\hbar^2}{m e^2} \right)^{-3/2} \frac{e^{-r \left( \frac{\hbar^2}{m e^2} \right)^{-1}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{-e}. \quad (6)$$

Die elementare Integration liefert:

$$\Delta E = \frac{e^2}{\left( \frac{\hbar^2}{m e^2} \right)} v^2 \left( \frac{1}{(v+1)^2} + \frac{1}{(v+1)^3} \right), \quad v = \frac{r_0}{\left( \frac{\hbar^2}{m e^2} \right)}. \quad (7)$$

<sup>8)</sup> *Kush, Foley*, P. R. 72, 1256 (1947); *Foley, Kush*, P. R. 73, 412 (1948).

<sup>9)</sup> *Nagle, Julian, Zacharias*, P. R. 72, 971 (1947); *Mack, Austern*, P. R. 74, 1262; *Fowles*, P. R. 74, 219 (1948).

Die dimensionslose Größe  $v$ , welche das Verhältnis zwischen unserer angenommenen Kernaushdehnung und dem *Bohrschen* Radius bildet, müssen wir jedenfalls viel kleiner als eins ansetzen, so daß wir für die Energieverschiebung

$$\Delta E = \frac{2e^2}{\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)} \left( \frac{r_0}{\frac{\hbar^2}{m}} \right)^2 \quad (8)$$

bekommen. Indem wir diese Größe gleich dem *Lamb-Shift* setzen, können wir den für den Effekt nötigen Kernradius  $r_0$  berechnen. Es ist noch zu bedenken, daß wir obige Rechnung für den Grundzustand ausgeführt haben; für den  $^2S_{1/2}$ -Zustand ergibt sich ein Achtel des obigen Wertes. Für  $r_0$  müßten wir zur Erklärung des *Lamb-Shifts*  $r_0 = 4,5 \cdot 10^{-12}$  cm annehmen, einen viel zu großen Wert. Wenngleich es nicht leicht zu sagen ist, was für eine Ausdehnung man dem Proton als Wasserstoffkern zuzuschreiben hat, ist der Radius des Deuterons aus der Kerntheorie recht genau bekannt<sup>10)</sup>, nämlich  $4,4 \cdot 10^{-13}$  cm. Dies ergibt einen viel zu kleinen Wert für den *Lamb-Shift*; wir haben die sich mit diesem Wert ergebende Verschiebung in Abb. 2 unter *A* neben dem tatsächlich eintretenden *Lamb-Shift* eingetragen. Ähnliche Überlegungen mit etwas anderen Potentialansätzen, aber den gleichen Ergebnissen wurden schon vor langer Zeit von einigen Autoren durchgeführt<sup>11)</sup>.

Ein anderes Phänomen, welches zu einer Abänderung des *Coulomb-Potentials* führt, ist die Vakuum polarisation, eine Konsequenz der Positrontheorie. Ein starkes elektrisches Feld hat bekanntlich die Fähigkeit, Elektron-Positron-Paare zu erzeugen. Wenn das Feld nun nicht die Energie besitzt, um tatsächlich solche Paare zu erzeugen, so übt es doch eine Art polarisierende Wirkung auf die sozusagen stets vorhandenen geburtsbereiten Elektron-Positron-Paare aus. Dieser Effekt ist bei den normal vorkommenden Potentialdifferenzen natürlich verschwindend klein, müßte sich aber bei den stärkeren Feldern in unmittelbarer Nähe des Kernes bemerkbar machen. Die genaue Berechnung<sup>12)</sup> ergibt für die induzierte Ladung  $\rho_P$  bei einer statischen, das elektrische Feld erzeugenden primären Ladung  $\rho$ :

$$\rho_P = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{1}{k_0^2} \Delta \rho, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad k_0^2 = \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2. \quad (9)$$

<sup>10)</sup> L. Rosenfeld, Nuclear Forces, Amsterdam 1948, S. 101.

<sup>11)</sup> Kemble, Present, P. R. 44, 1031; Sommerfeld, Z. Physik 118, 295 (1941).

<sup>12)</sup> J. Schwinger, P. R. 74, 1439 (1948), P. R. 75, 651 (1949), P. R. 76, 791 (1949); frühere Rechnungen: Heisenberg, Z. Physik 90, 209 (1934); Pauli, Rose, P. R. 49, 462 (1936); Serber, P. R. 48, 49 (1935).



$\rho$  ist die primäre Ladungsdichte; der Effekt tritt also nur bei starken Änderungen der Ladungsdichte auf. Das von dieser Zusatzladung erzeugte Potential läßt sich leicht berechnen.

$$\Delta V_p = -4\pi\rho_p, \quad V_p = \frac{4\alpha}{15k_0^2}\rho. \quad (10)$$

Für unseren Fall können wir die Ladungsdichte des Kernes durch eine Punktsingularität approximieren und erhalten mit denselben Methoden wie oben

$$\begin{aligned} \rho &= e\delta(\vec{x}), \\ \Delta E &= \int V_p |\psi|^2 d\tau = \frac{4\alpha e}{15k_0^2} |\psi(0)|^2, \\ \Delta E_{1s} &= \frac{-8}{15\pi} \alpha^3 \text{ Ry}; \quad \Delta E_{2s} = \frac{-1}{15\pi} \alpha^3 \text{ Ry}. \end{aligned} \quad (11)$$

Dieses Resultat wurde zuerst von *Ühling*<sup>13)</sup> abgeleitet. Einsetzen der Werte für die Atomkonstanten ergibt einen Wert, der nur etwa ein Vierzigstel des *Lamb*-Shifts ausmacht und außerdem das falsche Vorzeichen hat; in Abb. 2 haben wir diese Verschiebung unter *V* eingetragen. Es ist offensichtlich, daß wir auch diesen Deutungsversuch aus unserer Liste streichen können.

Ein anderes Phänomen, welches in diesem Zusammenhang stellenweise diskutiert wurde, ist die der Vakuumpolarisation parallele Erscheinung im Mesonfeld. Da die Nukleonen nicht nur mit dem elektrischen, sondern auch mit dem Mesonfeld gekoppelt sind, werden sie, auch wenn sie keine reellen Mesonen erzeugen können, stets mit einer Art Mesonwolke umgeben sein. Dies führt unter anderem zum anomalen magnetischen Moment von Neutron und Proton, ferner zu einer Anziehungskraft zwischen Neutron und Elektron, ein Effekt, der in jüngster Zeit entdeckt wurde<sup>14)</sup>. Die Mesonwolke wurde schon 1939 von *Fröhlich*, *Heitler* und *Kahn*<sup>15)</sup> berechnet, und diese Autoren kamen für die Wirkung der Mesonwolke um das Proton auf das Wasserstoffspektrum zu folgendem Ergebnis: Der Grundterm wird um  $3 \text{ cm}^{-1}$ , der  $^2S_{1/2}$ -Term um  $0,3 \text{ cm}^{-1}$  hinauf verschoben, also das Zehnfache des *Lamb*-Shifts. Dieser unerwartet große Wert wurde jedoch von *Lamb* angefochten. Da diese Resultate wesentlich davon abhängen, auf welche Weise divergente Ausdrücke limitiert werden, sind sie keineswegs eindeutig. Die verschiedensten Autoren haben seither dieses Problem behandelt,

<sup>13)</sup> *Ühling*, P. R. **48**, 55 (1935).

<sup>14)</sup> *Havens*, *Rabi*, *Rainwater*, P. R. **72**, 634 (1947); *Fermi*, *Marschak*, P. R. **72**, 634 (1947); *Rainwater*, *Rabi*, *Havens*, P. R. **75**, 1295.

<sup>15)</sup> *Fröhlich*, *Heitler*, *Kahn*, Proc. Roy. Soc. **77**, 269 (1939); ferner *Lamb*, *Schiff*, P. R. **53**, 651; *Lamb*, P. R. **56**, 384; *Fröhlich*, *Heitler*, *Kahn*, P. R. **56**, 961.

ohne sich auf ein Resultat einigen zu können. Nach der *Schwingerschen* Methode berechnet<sup>16)</sup>, würde der Effekt nur zwei Zehntausendstel des *Lamb-Shifts* ausmachen. Da jedoch dieselbe Methode im Fall des anomalen magnetischen Moments der Nukleonen zu Resultaten führt, die um einige hundert Prozent falsch sind, ist dieser Wert auch nicht allzu wörtlich zu nehmen. Wenngleich man so auf Grund der theoretischen Berechnungen keine sichere Antwort erhalten kann, gibt es doch einen Umstand, der den Erklärungsversuch mit der Mesonwolke mit Sicherheit auszuschließen gestattet. Im Deuteron würden sich nämlich die Mesonwolken von Proton und Neutron weitgehendst aufheben, so daß der *Lamb-Shift* fast vollständig verschwinden würde. Tatsächlich ist jedoch keine merkbare Änderung des *Lamb-Shifts* zwischen Wasserstoff und Deuterium vorhanden. Zusammenfassend können wir also sagen, daß unter halbwegs wahrscheinlichen Annahmen der *Lamb-Shift* nicht durch eine Abänderung des *Coulomb-Potentials* erklärt werden kann.

### B. Selbstenergie des Elektrons.

Wir kommen nun zu jener Deutung, welche heute allgemein anerkannt wird. Man nimmt an, daß der Energieunterschied zwischen dem  $^2S_{1/2}$ - und dem  $^2P_{1/2}$ -Zustand durch die verschiedene Selbstenergie des Elektrons in beiden Zuständen verursacht wird. Leider kann hier, ohne allzuviel vom Leser vorauszusetzen, nicht die strenge Theorie des Effektes gegeben werden, wir müssen dazu auf die Originalliteratur verweisen<sup>17)</sup>. Wir wollen jedoch versuchen, das Wesentliche mit elementaren Methoden hier klarzumachen. Die Selbstenergie des Elektrons, also die Rückwirkung des eigenen Feldes, hat schon in der klassischen Theorie des Elektrons große Schwierigkeiten verursacht. Für ein Punktelektron wird hier die Selbstenergie unendlich, bei einem ausgedehnten Modell sind wieder die Kräfte unerklärlich, welche das Elektron zusammenhalten, außerdem haben Selbstenergie und Selbstimpuls nicht die richtigen relativistischen Transformationseigenschaften. Ferner würde sich die Selbstenergie nicht nur in einer Änderung der Masse, sondern auch in von höheren Zeitableitungen der Geschwindigkeit abhängigen Termen bemerkbar machen. In der Quantentheorie wird die Situation dadurch verändert, daß die Selbstenergie nicht nur aus der Wechselwirkung des Elektrons mit seinem eigenen Feld, sondern auch aus der Wechselwirkung mit den weiter unten

<sup>16)</sup> *Borowitz, Kohn*, P. R. 76, 818 (1949); *Case*, P. R. 76, 1; andere Arbeiten: *Heitler, Slotnick*, P. R. 75, 1645 (1949).

<sup>17)</sup> *Bethe*, P. R. 72, 339 (1947); *Lewis*, P. R. 73, 173; *J. Schwinger*, P. R. 73, 415; *Tomonaga*, P. R. 74, 224; *Feynman*, P. R. 74, 1439, P. R. 74, 939; *Dyson*, P. R. 73, 617, P. R. 75, 486; *Kroll, Lamb*, P. R. 75, 388; *French, Weißkopf*, P. R. 75, 1240; *Weißkopf*, Rev. Mod. Phys. 21, 305 (1949).



beschriebenen Vakuumschwankungen des elektrischen Feldes besteht. *Schwinger* hat nun bewiesen, daß sich beide Effekte zusammen nur in einer Veränderung der Ruhmasse geltend machen, wobei wir kaum bemerken müssen, daß auch hier der zusätzliche Term unendlich groß ist. Indem wir uns vorstellen, daß die zukünftige richtige Theorie diesen Term endlich machen wird, können wir ihn einfach weglassen, da er in der beobachteten Masse ohnedies schon inbegriffen ist. Man kann die Selbstenergie gar nicht von der Masse unterscheiden, bemerkbar werden nur Unterschiede in der Selbstenergie sein. Der *Schwingersche* Beweis bezieht sich nur auf ein freies Elektron; es handelt sich nun darum, den Unterschied der Selbstenergie zwischen einem freien und einem verschieden stark gebundenen Elektron zu berechnen. Es zeigt sich, daß dafür gerade jener Teil der Selbstenergie verantwortlich ist, welcher durch jene der klassischen Theorie fremde Wechselwirkung mit den Vakuumschwankungen des elektrischen Feldes bewirkt wird. In der Quantenelektrodynamik wird nämlich das elektrische Feld in einzelne Partialwellen zerlegt und jede davon als Oszillator betrachtet. Der Umstand, daß ein quantentheoretischen Zustand im Gegensatz zum klassischen auch im nichtangeregten Zustand eine nicht verschwindende Energie besitzt, führt zu wesentlichen Konsequenzen. Es verschwindet zwar im Vakuum die elektrische Feldstärke, nicht aber das mittlere Schwankungsquadrat der Feldstärke. Dieses paradoxe Phänomen kommt formal daher, daß in der Quantenelektrodynamik die Feldstärke durch eine Matrix dargestellt wird und daß das Quadrat einer Matrix  $M$  einen von Null verschiedenen Erwartungswert  $\Psi^* M^2 \Psi$  besitzen kann, auch wenn der Erwartungswert der Matrix selbst,  $\Psi^* M \Psi$ , verschwindet. Entsprechend der Nullpunktenergie  $\frac{h\nu}{2}$  eines Oszillators ergibt sich nun für das mittlere Schwankungsquadrat der elektrischen Feldstärke:

$$|\overline{\mathfrak{E}^2}| = \frac{2\hbar c}{\pi} \int k^3 dk. \quad (12)$$

Wir haben hier gleich Integration über die den einzelnen Wellen der Wellenzahl  $k$  entsprechenden Beträge ausgeführt. Über die Integrationsgrenzen werden wir später sprechen.

Man kann nun zeigen<sup>18)</sup>, daß die Vakuumschwankungen sich auf das Elektron genau so auswirken, als ob wirkliche Feldstärken ein klassisches Punktelektron zu einem Vibrieren bringen würden. Man kann so die den einzelnen Teilwellen entsprechenden Feldstärken formal aus dem Schwankungsquadrat berechnen und in die klassische Bewegungsgleichung

<sup>18)</sup> *Welton*, P. R. **74**, 1157 (1948).

einsetzen. Daraus ergibt sich die von den einzelnen Partialwellen hervorgerufene Schwingung des Elektrons, und man erhält für das mittlere Schwankungsquadrat des Orts des Elektrons, wenn man wieder über die einzelnen Beträge integriert,

$$(\Delta q)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int \frac{dk}{k}. \quad (13)$$

So kommt es nun, daß sich die potentielle Energie des Elektrons etwas verändert, da der Ort des Elektrons etwas verschieden von seinem normalen Wert  $q$  ist. Die anderen Wirkungen dieser Vibration sind dieselben wie im Vakuum und liefern daher keinen Beitrag zur Differenz der Selbstenergie. Quantitativ haben wir:

$$\begin{aligned} V(q + \Delta q) &= V(q) + \vec{\Delta q} \cdot \nabla V(q) + (\vec{\Delta q} \cdot \nabla)^2 V(q) + \dots - \\ &- V(q) + \frac{1}{6} (\Delta q)^2 \Delta V(q) = V(q) + \frac{4e}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \delta(\vec{q}) \int \frac{dk}{k}. \end{aligned} \quad (14)$$

Infolge der Isotropie von  $\Delta q$  verschwindet der zweite Term bei Mittelung über alle Raumwinkel. Bezüglich der Integrationsgrenzen ist zu sagen, daß man als obere Grenze die *Compton*-Wellenlänge des Elektrons wählen muß, da bei kürzeren Wellenlängen die bisher vernachlässigte räumliche Abhängigkeit des elektrischen Feldes mit ins Spiel kommt. Durch die Vibration wirkt auf das Elektron nur der Mittelwert des elektrischen Feldes in einem Gebiet der Größenordnung einer *Compton*-Wellenlänge, dieser verschwindet bei kürzeren Wellenlängen. Auch die untere Grenze bleibt endlich, da das gebundene Elektron Schwingungen zu großer Wellenlänge, die es aus dem Atom entfernen würden, nicht zu folgen vermag. Wie eine genauere Rechnung zeigt, muß man für die untere Grenze eine Wellenzahl  $k_1$  annehmen, die einer Energie von 17,8 *Rydberg*-Einheiten entspricht. Glücklicherweise stehen diese Größen im Resultat unter einem Logarithmus, ihr genauer Wert hat daher keinen wesentlichen Einfluß. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned} V_s(q) &= \frac{4e}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{\hbar c}{mc^2} \right)^2 \ln \frac{k_0}{k_1} \cdot \delta(\vec{q}) \\ \Delta E &= \frac{4e}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{\hbar c}{mc^2} \right)^2 \ln \frac{k_0}{k_1} \cdot |\psi_{(0)}|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Einsetzen der Atomkonstanten liefert den numerischen Wert von  $0,0345 \text{ cm}^{-1}$ . Dieser Effekt gibt nicht nur bis auf wenige Prozent den richtigen numerischen Wert, sondern läßt auch dasselbe Resultat für das Deuteron erwarten. Auch stimmen die Messungen bei Helium mit obiger Formel überein. Diese



wurde zuerst von *Bethe* auf nichtrelativistische Weise abgeleitet und ist seither von einigen Autoren genauer untersucht worden. (Siehe Literatur S. 334.) Diese haben die Rechnung relativistisch ergänzt, nach verschiedenen Seiten verfeinert und das Resultat erhärtet. Dieses Ergebnis hat das Zutrauen zur Quantenelektrodynamik wieder aufleben lassen, es hat gezeigt, daß der bisherige Weg nicht ganz so verfehlt war, wie man bisher angenommen hatte.

# Zum Kernphotoeffekt an Beryllium.

Von

**Otto Bergmann.**

Institut für Theoretische Physik der Universität Wien.

Mit 6 Abbildungen.

(Eingelangt am 11. November 1949.)

Es wird die Formel für den Wirkungsquerschnitt der Kernreaktion  $(\gamma, n)$  an  ${}^9\text{Be}$  unter Zugrundelegung des Zweikörpermodells abgeleitet und diskutiert. Wird die Kraftreichweite mit  $r = 5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  in allen Zuständen angenommen, erhält man die Muldentiefe im Grundzustand zu 12,09 MeV und in den kontinuierlichen Endzuständen zu 3,3 MeV.

Im Gegensatz zum Deuteronkern scheint die Berechnung des Wirkungsquerschnittes des Kernphotoeffektes an  ${}^9\text{Be}$  nach dem Zweikörpermodell zunächst problematisch. Jedoch sprechen einige Gründe, die von *Guth* [1] und *Sextl* [2] angegeben und in einer späteren Arbeit von *Guth* und *Mullin* [3] näher diskutiert wurden, für die Anwendbarkeit des erwähnten Modells. Insbesondere spricht die geringe Bindung des Photoneutrons am Restkern im Vergleich zur mittleren Bindungsenergie pro Partikel dafür. In Übereinstimmung mit anderen Messungen wurde für diese Bindungsenergie des Neutrons am Restkern von *Collins*, *Waldman* und *Guth* [4] der Wert 1,63 MeV gefunden. Denselben Wert erhielten auch *Myers* und *van Atta* [5].

Aus allgemeinen Betrachtungen über den Schalenaufbau der leichten Kerne folgt, daß der Grundzustand ein  ${}^2P_{3/2}$ -Zustand ist ([6], [7], [8]). Demgemäß kommt für den elektrischen Anteil des Wirkungsquerschnittes der Übergang in den *S*- und in den *D*-Zustand in Frage. Ferner wäre noch ein magnetischer Anteil, der durch Umlappen des Spinmomentes entsteht, zu berücksichtigen. In dieser Arbeit wird nur der elektrische Anteil diskutiert, der ein scharfes Maximum des Wirkungsquerschnittes bei einer  $\gamma$ -Energie von 1,7 MeV und ein viel breiteres bei  $\sim 4 \text{ MeV}$  zeigt. Nach den Experimenten von *Russell*, *Sachs*, *Wattenberg* und *Fields* [9] dürfte daher der elektrische Anteil die Tendenz der Wirkungsquerschnittskurve als Funktion der  $\gamma$ -Energie bestimmen.



Eine ausführliche Diskussion über diese Fragen, insbesondere auch über die Berechtigung zur Vernachlässigung des magnetischen Anteils gaben *Guth* und *Mullin* [10]. Die erwähnte Frage könnte durch Bestimmung der Winkelabhängigkeit der Photoneutronen beantwortet werden.

Die Formel für den Übergang  $P \rightarrow S$  wurde bereits von *Sexl* [2] veröffentlicht, jedoch unter der Annahme, daß in beiden Zuständen das gleiche Potential herrscht. Es wird nun in dieser Arbeit gezeigt, daß diese Annahme nicht die richtige Lage des ersten Maximums des Wirkungsquerschnittes ergibt und daher erweitert werden muß.

Die allgemeine Formel für den Wirkungsquerschnitt lautet (man vergleiche etwa [6], S. 142 und 166):

$$\sigma = \frac{8\pi^3 v}{c} \sum_l M_z(E)^2,$$

worin die Summe über die möglichen Endzustände zu erstrecken ist und

$$M_z(E) = Ze \frac{\mu}{m} \int \psi_l^*(E) z \psi_1 d\tau$$

bedeutet.  $\mu/m$  ist das Verhältnis der reduzierten Masse des Systems zur Masse des Restkerns und

$$E = h\nu - \varepsilon.$$

$\varepsilon$  bedeutet die Bindungsenergie des Neutrons am Restkern,  $\psi_l$  die Wellenfunktion des kontinuierlichen Endzustandes und  $\psi_1$  die des diskreten Grundzustandes ( $P$ -Zustand), beide im üblichen Weg normiert.

Die normierten *Schrödinger*-Funktionen lauten [2]: Im Grundzustand ( $l=1$ )

$$\psi_1^{(i)} = N_P \frac{1}{r} \left\{ \frac{\sin n_0 k_0 r}{n_0 k_0 r} - \cos n_0 k_0 r \right\} P_1(\cos \vartheta); \quad r \leq r_0$$

$$\psi_1^{(a)} = N_P N_P^{(a)} \frac{1}{r} e^{-k_0(r-r_0)} \left\{ 1 + \frac{1}{k_0 r} \right\} P_1(\cos \vartheta); \quad r \geq r_0$$

mit den Normierungsfaktoren

$$\begin{aligned} &= -3/2\pi r_0 \cdot [(n_0 k_0 r_0)^2 + R^2] [R - 2 + R^2 - n_0^4 (2 + k_0 r_0) + (n_0 k_0 r_0)^2] = \\ &= -3/2\pi r_0 n_0^2 (n_0^2 + 1) \cdot [(n_0 k_0 r_0)^2 + R^2] [3(1 + k_0 r_0) + k_0^2 r_0^2] \\ &= -n_0 \sin n_0 k_0 r_0 = -n_0^2 k_0 r_0 [(n_0 k_0 r_0)^2 + R^2]^{-1/2} \end{aligned}$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} n_0 &= (V_0 \varepsilon - 1)^{1/2}; \quad k_0 = (2\mu \varepsilon / \hbar^2)^{1/2}; \\ R &= n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1. \end{aligned}$$

$P_1(\cos \vartheta)$  ist die *Legendresche* Kugelfunktion. Zur Berechnung der Normierungsfaktoren wurde die Eigenwertgleichung für den Grundzustand herangezogen, welche in die Form gebracht werden kann:

$$\text{ctg } n_0 k_0 r_0 = R/n_0 k_0 r_0.$$

Im  $S$ -Zustand ( $l=0$ ) ist die Wellenfunktion<sup>1)</sup>:

$$\psi_0^{(i)} = N_S N_S^{(i)} \frac{1}{r} \sin n_1 k r; \quad r \leq r_0$$

$$\psi_0^{(a)} = N_S \frac{1}{r} \sin(kr + \delta_0); \quad r \geq r_0$$

mit

$$N_S^{(i)} = \frac{\sin(kr_0 + \delta_0)}{\sin n_1 k r_0}$$

$$N_S^2 = \frac{2\mu}{\pi} \cdot \frac{1}{k \hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi}$$

und den Abkürzungen

$$n_1^2 = 1 + V_1/E; \quad k = (2\mu E/\hbar^2)^{1/2}.$$

$\delta_l$  ist die Phasenverschiebung des betreffenden Zustandes, deren Berechnung keine Schwierigkeiten bereitet, wenn als Potentialfunktion die Potentialmulde zugrunde gelegt wird.

Für den  $D$ -Zustand ( $l=2$ ) schließlich ist die Wellenfunktion<sup>2)</sup>

$$\psi_2^{(i)} = N_D N_D^{(i)} \frac{1}{r} \left\{ \left( \frac{3}{(n_2 k r)^2} - 1 \right) \sin n_2 k r - \frac{3}{n_2 k r} \cos n_2 k r \right\} P_2(\cos \vartheta);$$

$$\psi_2^{(a)} = N_D \frac{1}{r} \left\{ \left( \frac{3}{(k r)^2} - 1 \right) \sin(kr + \delta_2) - \frac{3}{k r} \cos(kr + \delta_2) \right\} P_2(\cos \vartheta);$$

mit

$$N_D^{(i)} = \frac{\left( 1 - \frac{3}{(k r_0)^2} \right) \sin(kr_0 + \delta_2) + \frac{3}{k r_0} \cos(kr_0 + \delta_2)}{\left( 1 - \frac{3}{(n_2 k r_0)^2} \right) \sin n_2 k r_0 + \frac{3}{n_2 k r_0} \cos n_2 k r_0}$$

$$N_D^2 = \frac{2\mu}{\pi} \cdot \frac{1}{k \hbar^2} \cdot \frac{5}{4\pi}; \quad n_2^2 = 1 + V_2/E.$$

<sup>1)</sup> Der stetige Übergang der Wellenfunktion an der Stelle  $r_0$  ist durch den Normierungsfaktor  $N_S^{(i)}$  garantiert. Die Stetigkeit der Ableitung  $d\psi_0/dr$ , die ebenfalls zu fordern ist, ergibt eine Gleichung für  $\delta_0$ . Diese Gleichung wird auf S. 341 dieser Arbeit angeführt und bei der Berechnung des Matrixelementes  $|M_z|$  im zweiten Teil zur Elimination von  $\delta_0$  benützt werden. Bezüglich der Berechnung von  $N_S$  vergleiche [6], S. 144–145.

<sup>2)</sup> Vergleiche vorige Fußnote. — Es wird hier die bekannte Formel für die Besselfunktion  $J_{5/2}(x)$  benützt. Vergleiche etwa [6], S. 134.



Zum Unterschied von  $V_1$  wurde hier die Tiefe der Potentialmulde mit  $V_2$  bezeichnet, jedoch wird im späteren Verlauf der Diskussion  $V_1 = V_2$  gesetzt, da bei diesen hohen  $\gamma$ -Energien ausreichende Messungen fehlen. Hingegen wurden schon hier die Kraftreichweiten in allen Zuständen gleich groß angenommen. Eine Verallgemeinerung in dieser Richtung dürfte derzeit kaum nötig sein.

Um die Phasengrößen zu eliminieren, benötigen wir die Beziehungen [11]:

$$\operatorname{ctg}(k r_0 + \delta_0) = n_1 \operatorname{ctg} n_1 k r_0,$$

$$\operatorname{ctg}(k r_0 + \delta_2) = \frac{1}{k r_0} - \frac{1}{\frac{3}{k r_0} - \frac{1}{n_2 \left( \frac{3}{n_2 k r_0} - \frac{1}{\frac{1}{n_2 k r_0} - \operatorname{ctg} n_2 k r_0} \right)}}$$

$N_D^{(i)}$  kann mit Hilfe der zweiten Gleichung zu

$$N_D^{(i)} = \frac{\sin(k r_0 + \delta_2)}{\sin n_2 k r_0} \cdot \frac{1}{\frac{3}{(n_2 k r_0)^2} (n_2^2 - 1) (1 - n_2 k r_0 \operatorname{ctg} n_2 k r_0) + 1}$$

vereinfacht werden. Der Faktor  $\sin(k r_0 + \delta_2)$  soll erst am Schluß der Rechnung ersetzt werden.

## 1. Übergang in den $S$ -Zustand ([2]).

Sextl erhielt für den Wirkungsquerschnitt

$$= \frac{32 \pi (Z e)^2}{9} \left( \frac{\mu}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{\hbar}{m} \right)^3 \frac{(1 + k_0 r_0)^2}{1 + k_0 r_0} \frac{1}{3} \frac{V_0 - \varepsilon}{k_0^2 r_0^2} \frac{V_0}{r_0} \frac{E^{1/2}}{(E + \varepsilon)^3 (E + \varepsilon')} \dots (1)$$

unter der Annahme, daß  $V_1 = V_0$ . Die Verallgemeinerung ist leicht durchzuführen. Setzt man zur Abkürzung

$$M_z^{(i)} = Z e \frac{1}{m} \int_0^{\tau_0} \psi_1 \psi_0 d\tau,$$

so folgt, wegen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3},$$

der Ausdruck

$$\begin{aligned} &= \frac{4\pi}{3} Z e \frac{1}{m} N_P N_S \left\{ N_s^{(i)} \int_0^{r_0} \frac{1}{n_0 k_0} \sin n_0 k_0 r \cdot \sin n_1 k r - r \cdot \cos n_0 k_0 r \cdot \sin n_1 k r \right\} dr + \\ &+ N_P^{(a)} e k_0 r_0 \int_{r_0}^\infty \left[ r e^{-k_0 r} \sin(k r + \delta_0) + \frac{1}{k_0} e^{-k_0 r} \sin(k r + \delta_0) \right] dr \end{aligned}$$

Die darin vorkommenden Integrale können ohne weiteres ausgewertet werden, und man erhält mit Hilfe der oben angegebenen Identität für  $\text{ctg}(k r_0 + \delta_0)$  die Formel

$$|M_z^0| = \frac{4\pi}{3} Z e \frac{\mu}{m} N_P N_S \sin(k r_0 + \delta_0) \sin n_0 k_0 r_0 \left\{ \text{ctg } n_0 k_0 r_0 \left[ \frac{1}{(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2} - \frac{(n_1 k)^2 + (n_0 k_0)^2}{[(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} \right] + \text{ctg } n_1 k r_0 \left[ -\frac{n_1 k}{n_0 k_0} \cdot \frac{1}{(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \frac{2 n_0 k_0 n_1 k}{[(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} \right] \right. \\ \left. + \text{ctg } n_1 k r_0 \cdot \text{ctg } n_0 k_0 r_0 \frac{n_1 k r_0}{(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \frac{n_0 k_0 r_0}{(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2} - n_0 \frac{k_0 r_0 + 1}{k_0^2 + k^2} - n_0 \frac{k_0^2 - k^2}{(k_0^2 + k^2)^2} - n_0 n_1 \text{ctg } n_1 k r_0 \left[ \frac{k r_0}{(k_0^2 + k^2)} + \frac{2 k_0 k}{(k_0^2 + k^2)^2} + \frac{k}{k_0} \frac{1}{k_0^2 + k^2} \right] \right\}.$$

Benützt man noch die Eigenwertgleichung

$$\text{ctg } n_0 k_0 r_0 = \frac{n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1}{n_0 k_0 r_0}$$

und setzt zur Vereinfachung der Formeln

$$n_1 k \text{ctg } n_1 k r_0 = k',$$

so erhält man schließlich

$$|M_z^0| = \frac{4\pi}{3} Z e \frac{\mu}{m} N_P N_S \sin(k r_0 + \delta_0) \sin n_0 k_0 r_0 \left\{ -\frac{2 n_0 k_0}{r_0} \frac{n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1}{[(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} - \frac{2 n_0 k_0^2}{(k_0^2 + k^2)^2} + \left[ \frac{k^2 + k_0^2}{(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2} - 1 \right] \cdot \left[ \frac{n_0 k_0 r_0}{k^2 + k_0^2} + n_0 \frac{k'}{k} \frac{1 + k_0 r_0}{k^2 + k_0^2} \right] + \left[ \left( \frac{k^2 + k_0^2}{(n_1 k)^2 - (n_0 k_0)^2} \right)^2 - 1 \right] \cdot \frac{2 n_0 k_0 k'}{(k^2 + k_0^2)^2} \right\}.$$

Durch Herausziehen von

$$\frac{2 n_0 k_0}{r_0} \frac{(1 + k_0 r_0)}{(k_0^2 + k^2)^2} \cdot (1 + n_0^2)$$

aus der geschweiften Klammer und einigen Vereinfachungen erhält man für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_S = \frac{32 \pi}{9} \frac{(Ze)^2}{\hbar c} \left( \frac{\mu}{m} \right)^2 \frac{(1 + k_0 r_0)^2}{1 + k_0 r_0 + \frac{1}{3} k_0^2 r_0^2} \left( \frac{\hbar}{2\mu} \right)^3 V_0 \frac{E + \varepsilon}{V_0} \frac{V_0^2}{r_0} \frac{E^2}{(E + \varepsilon)^3 (E + \varepsilon + V_1 - V_0)^2} \\ \cdot \left\{ \frac{(E + \varepsilon)^2}{(E + \varepsilon + V_1 - V_0)^2} + \frac{k_0 r_0}{2(1 + k_0 r_0)} \frac{E + \varepsilon}{V_0} \left[ 1 - \frac{E + \varepsilon}{E + \varepsilon + V_1 - V_0} \right] \cdot \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} + (k' + k_0) r_0 \right] + \frac{\varepsilon}{V_0} \frac{(k_0 + k') r_0}{1 + k_0 r_0} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{E + \varepsilon}{E + \varepsilon + V_1 - V_0} \right)^2 \right] \right\}^2$$

den man in der Form



$$\begin{aligned}
 = \sigma_s \left\{ \left( \frac{1}{1 - \frac{V_1 - V_0}{E - \varepsilon}} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{V_1 - V_0}{E - \varepsilon}} \frac{1}{2} \frac{V_1 - V_0}{V_0} \left[ (k' + k_0) r_0 - \frac{k_0 r_0}{1 + k_0 r_0} \right] + \right. \\
 \left. - \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 - \frac{V_1 - V_0}{E - \varepsilon}} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon}{V_0} \frac{(k_0 + k') r_0}{1 + k_0 r_0} \right\} \dots \quad (2)
 \end{aligned}$$

schreiben kann, worin  $\sigma_s$  den Wirkungsquerschnitt für gleiche Potentialtiefen darstellt. Für  $V_1 = V_0$  geht natürlich die Formel in die frühere über.

## 2. Übergang in den $D$ -Zustand.

Die Integration über die Winkelvariablen ergibt hier, wegen

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta; \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1),$$

den Wert

$$-\frac{2\pi}{2} \int_0^\pi \cos^2 \vartheta (3 \cos^2 \vartheta - 1) d \cos \vartheta = 2\pi \frac{4}{15}$$

und daher ist

$$\begin{aligned}
 M_z^2 = \frac{8\pi}{15} Z e \frac{1}{m} N_P N_D \left\{ N_D^{(i)} \int_0^{r_0} \left| \frac{\sin n_0 k_0 r}{n_0 k_0 r} - \cos n_0 k_0 r \right| \cdot \left| \left( \frac{3}{(n_2 k r)^2} - 1 \right) \cdot \right. \right. \\
 \left. \cdot \sin n_2 k r - \frac{3}{n_2 k r} \cos n_2 k r \right| r dr + N_P^{(a)} \int_{r_0}^\infty e^{-k_0 (r - r_0)} \left[ 1 + \frac{1}{k_0 r} \right] \cdot \\
 \left. \cdot \left| \left( \frac{3}{(k r)^2} - 1 \right) \sin (k r + \delta_2) - \frac{3}{k r} \cos (k r + \delta_2) \right| r dr \right\}.
 \end{aligned}$$

Die zwölf Integrale bereiten keine Schwierigkeiten und man erhält

$$\begin{aligned}
 |M_z^2| = \frac{8\pi}{15} Z e \frac{1}{m} N_P N_D \left\{ N_D^{(i)} \left[ -\frac{3 \sin n_0 k_0 r_0 \cdot \sin n_2 k r_0}{n_0 k_0 r_0 (n_2 k)^2} + \right. \right. \\
 + \frac{\sin (n_2 k - n_0 k_0) r_0}{2 (n_2 k - n_0 k_0)} \left( \frac{3}{n_2 k} - \frac{1}{n_0 k_0} + \frac{1}{(n_2 k - n_0 k_0)} \right) + \\
 + \frac{\sin (n_2 k + n_0 k_0) r_0}{2 (n_2 k + n_0 k_0)} \left( \frac{3}{n_2 k} + \frac{1}{n_0 k_0} + \frac{1}{(n_2 k + n_0 k_0)} \right) - \\
 \left. - r_0 \left( \frac{\cos (n_2 k + n_0 k_0) r_0}{2 (n_2 k + n_0 k_0)} + \frac{\cos (n_2 k - n_0 k_0) r_0}{2 (n_2 k - n_0 k_0)} \right) \right] + \\
 + N_P^{(a)} \left[ \sin (k r_0 + \delta_2) \left( \frac{3}{k_0 r_0 k^2} - \frac{k_0 r_0 - 2}{k_0^2 + k^2} - \frac{k_0^2 - k^2}{(k_0^2 + k^2)^2} \right) + \right. \\
 \left. + \cos (k r_0 + \delta_2) \left( -\frac{2 k_0 k}{(k_0^2 + k^2)^2} - \frac{1}{k_0^2 + k^2} \left( k r_0 + \frac{k}{k_0} + \frac{3 k_0}{k} \right) \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Hier kann der erste Teil, der mit  $N_D^{(i)}$  multipliziert ist, noch vereinfacht werden:

$$N_D^{(i)} \left\{ -\frac{3 \sin n_0 k_0 r_0 \cdot \sin n_2 k r_0}{n_0 k_0 r_0 (n_2 k)^2} + \frac{\sin n_2 k r_0 \cdot \cos n_0 k_0 r_0}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} [3(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2] - \right. \\ \left. - \frac{\cos n_2 k r_0 \cdot \sin n_0 k_0 r_0}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} \cdot n_0 k_0 n_2 k_2 \left[ 6 - \left( \frac{n_2 k}{n_0 k_0} \right)^2 - 3 \left( \frac{n_0 k_0}{n_2 k} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - n_2 k r_0 \frac{\cos n_2 k r_0 \cdot \cos n_0 k_0 r_0}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} - n_0 k_0 r_0 \frac{\sin n_2 k r_0 \cdot \sin n_0 k_0 r_0}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} \right\}.$$

Führt man die Abkürzung

$$A = \frac{3}{(n_2 k r_0)^2} (n_2^2 - 1) (1 - n_2 k r_0 \operatorname{ctg} n_2 k r_0) + 1$$

ein und zieht  $\sin n_0 k_0 r_0$  vor die Klammer, andererseits  $\sin n_2 k r_0$  in die Klammer hinein, so nimmt dieser Ausdruck die Form an:

$$\frac{1}{A} \sin(k r_0 + \delta_2) \sin n_0 k_0 r_0 \left\{ -\frac{3}{n_0 k_0 r_0 (n_2 k)^2} - \frac{n_0 k_0 r_0}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1}{n_0 k_0 r_0} \cdot \frac{3(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} \right\} - \\ - \frac{1}{A} \sin(k r_0 + \delta_2) \sin n_0 k_0 r_0 \operatorname{ctg} n_2 k r_0 \left\{ \frac{n_2 k}{n_0 k_0} \frac{n_2^2 (1 + k_1 r_0) + 1}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{n_0 k_0 n_2 k}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} \left[ 6 - \left( \frac{n_2 k}{n_0 k_0} \right)^2 - 3 \left( \frac{n_0 k_0}{n_2 k} \right)^2 \right] \right\}.$$

Zur Umformung des zweiten Summanden, der mit  $N_p^{(a)}$  multipliziert ist, verwendet man den schon mehrmals gebrauchten Ausdruck in der Form

$$\operatorname{ctg}(k r_0 + \delta_2) = \frac{1}{k r_0} \left( 1 - \frac{1 - n_2 k r_0 \operatorname{ctg} n_2 k r_0}{A} \right),$$

worin  $A$  wieder obige Abkürzung bezeichnet. Ferner wird im zweiten Teil  $\sin(k r_0 + \delta_2)$  herausgehoben:

$$- n_0 \sin(k r_0 + \delta_2) \sin n_0 k_0 r_0 \left\{ \frac{3}{k_0 r_0 k^2} - \frac{k_0 r_0 - 2}{k_0^2 + k^2} - \frac{k_0^2 - k^2}{(k_0^2 + k^2)^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{k_0^2 + k^2} \left( 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + 3 \frac{k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) - \frac{2 k_0}{r_0} \frac{1}{(k_0^2 + k^2)^2} + \right. \\ \left. + (1 - n_2 k r_0 \operatorname{ctg} n_2 k r_0) \cdot \frac{1}{A} \left[ \frac{1}{k_0^2 + k^2} \left( 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + 3 \frac{k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2 k_0}{r_0} \frac{1}{(k_0^2 + k^2)^2} \right] \right\}.$$

Nun können die Glieder wie folgt geordnet werden:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3}{n_0 k_0 r_0 (n_2 k)^2} - \frac{n_0 k_0 r_0}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \frac{n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1}{n_0 k_0 r_0} \cdot \frac{3 (n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} - \\
 & - \frac{n_0}{k_0^2 + k^2} \left( 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + 3 \frac{k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) - \frac{2 n_0 k_1}{r_0} \frac{1}{(k_0^2 + k^2)^2}; \\
 & \frac{n_2 k r_0}{A} : - \frac{n_0 k_0 n_2 k}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} \left[ 6 - \left( \frac{n_2 k}{n_0 k_0} \right)^2 - 3 \left( \frac{n_0 k_0}{n_2 k} \right)^2 \right] - \frac{n_2 k}{n_0 k_0} \cdot \frac{n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \\
 & + \frac{n_0 n_2 k r_0}{k_0^2 + k^2} \left( 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + 3 \frac{k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) + \frac{2 n_0 k_0 n_2 k}{(k_0^2 + k^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Und die übrigen Glieder:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3 n_0}{k_0 r_0 k^2} + \frac{n_0}{k_0^2 + k^2} \left[ k_0 r_0 - 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + 3 \frac{k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right] + \\
 & + \frac{n_0}{(k_0^2 + k^2)^2} \left[ k_0^2 - k^2 + 2 \frac{k_0}{r_0} \right].
 \end{aligned}$$

Bringt man alle Glieder auf den gemeinsamen Nenner  $A$  und hebt diesen heraus, so wird schließlich das gesuchte Matrixelement des elektrischen Dipolmomentes:

$$\begin{aligned}
 & = \frac{8 \pi}{15} Z e \frac{1}{m} N_P N_D \sin(k r_0 + \delta_2) \sin n_0 k_0 r_0 \frac{1}{A} \left\{ - \frac{3}{n_0 k_0 r_0 (n_2 k)^2} - \right. \\
 & - \frac{n_0 k_0 r_0}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \frac{n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1}{n_0 k_0 r_0} \cdot \frac{3 (n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} + \\
 & + \frac{3 n_0 (n_2^2 - 1)}{(n_2 k r_0)^2} \left[ - \frac{3}{k_0 r_0 k^2} + \frac{1}{k_0^2 + k^2} \left( k_0 r_0 - 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + \frac{3 k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{(k_0^2 + k^2)^2} \left( k_0^2 - k^2 + 2 \frac{k_0}{r_0} \right) \left. \right] - \frac{3 n_0}{k_0 r_0 k^2} + n_0 \frac{k_0 r_0}{k_0^2 + k^2} + n_0 \frac{k_0^2 - k^2}{(k_0^2 + k^2)^2} + \\
 & + \operatorname{ctg} n_2 k r_0 \left[ - \frac{n_0 k_0 n_2 k}{[(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2]^2} \left[ 6 - \left( \frac{n_2 k}{n_0 k_0} \right)^2 - 3 \left( \frac{n_0 k_0}{n_2 k} \right)^2 \right] - \right. \\
 & - \frac{n_2 k}{n_0 k_0} \cdot \frac{n_0^2 (1 + k_0 r_0) + 1}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} + \frac{n_0 n_2 k r_0}{k_0^2 + k^2} \left( 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + 3 \frac{k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) + \\
 & + \frac{2 n_0 k_0 n_2 k}{(k_0^2 + k^2)^2} - \frac{3 n_0 (n_2^2 - 1)}{n_2 k r_0} \left[ - \frac{3}{k_0 r_0 k^2} + \frac{1}{k_0^2 + k^2} \left( k_0 r_0 - 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + \frac{3 k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) + \right. \\
 & \left. \left. - 1 + \frac{1}{k_0 r_0} + \frac{3 k_0 r_0}{k^2 r_0^2} \right) + \frac{1}{(k_0^2 + k^2)^2} \left( k_0^2 - k^2 + 2 \frac{k_0}{r_0} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Aus der geschweiften Klammer wird der Ausdruck

$$- \frac{6 n_0}{n_2^2 k_0} \frac{n_2^2 - 1}{(k_0^2 + k^2)^2} \frac{1}{r_0^3} (1 + k_0 r_0)$$

herausgehoben. Man erhält dann

$$M_z^2 = - \frac{48 \pi}{15} Z e \frac{1}{m} N_P N_D \frac{n_0 (n_2^2 - 1)}{n_2^2 k_0 r_0^3} \frac{1 + k_0 r_0}{(k_0^2 + k^2)^2} \sin(k r_0 + \delta_2) \sin n_0 k_0 r_0 \frac{\Phi_D}{A}$$

mit



$$\Phi_D = [1 - k'' r_0] \left\{ 1 - \frac{k_0^2 r_0^2}{3} \frac{n_2^2}{n_2^2 - 1} \frac{1}{1 + k_0 r_0} \left[ \left( \frac{k_0^2 + k^2}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} \right)^2 - 1 \right] - \right. \\
- \frac{k_0^2 r_0^2}{3} \frac{n_2^2}{n_2^2 - 1} \left[ n_0^2 \cdot \left( \frac{k_0^2 + k^2}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} \right)^2 + 1 \right] + \left[ \left( \frac{k_0^2 + k^2}{(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2} \right) - 1 \right] \cdot \\
\cdot \frac{k_0^2 r_0^2}{2} \frac{1}{n_2^2 - 1} \left\{ \frac{k'' r_0}{1 + k_0 r_0} \left( 1 + \frac{k_0^2}{k^2} \right) + \frac{k'' r_0}{3} n_2^2 \left( 1 + \frac{k^2}{k_0^2} \right) - \right. \\
\left. \left. - n_2^2 \left( 1 + \frac{k^2}{k_0^2} \right) - \frac{1}{1 + k_0 r_0} \left( 1 + \frac{k_0^2}{k^2} \right) + \frac{k_0^2 r_0^2}{3} n_2^2 \left( 1 + \frac{k^2}{k_0^2} \right) \right\} \right\},$$

worin wieder

$$k'' = n_2 k \operatorname{ctg} n_2 k r_0$$

bedeutet. Zur Berechnung von  $\sigma_D$  benötigt man die Formeln

$$\sin^2(k r_0 + \delta_2) = \frac{A^2 k^2 r_0^2}{A^2 k^2 r_0^2 + (A - 1 + n_2 k r_0 \operatorname{ctg} n_2 k r_0)^2} \\
\sin^2 n_0 k_0 r_0 = \frac{n_0^2 k_0^2 r_0^2}{n_0^2 k_0^2 r_0^2 + R^2}$$

und erhält damit

$$\bar{\sigma}_D = \frac{138 \pi}{5} \frac{(Ze)^2}{\hbar c} \left( \frac{1}{m} \right)^2 \left( \frac{\hbar^2}{2\mu} \right)^{3/2} \frac{(1 + k_0 r_0)^2}{1 + k_0 r_0 + \frac{1}{3} k_0^2 r_0^2} \frac{1}{r_0^3} \cdot \\
\cdot \frac{1}{A^2 k^2 r_0^2 + (A - 1 + k'' r_0)^2} \cdot \frac{V_0 - \varepsilon}{V_0} \cdot V_2^2 \cdot \frac{E^{1/2}}{(E + \varepsilon)^3 (V_2 + E)^2} \cdot \Phi_D^2 \dots$$

Setzt man  $V_0 = V_2$ , so vereinfacht sich der Ausdruck für  $\Phi_D$  noch wegen der Identität

$$(n_2 k)^2 - (n_0 k_0)^2 = k_0^2 k^2$$

zu

$$\Phi_D = 1 - k'' r_0 - \frac{k_0^2 r_0^2}{3} n_2^2 \frac{n_0^2 + 1}{n_2^2 - 1} = 1 - k'' r_0 - \frac{2\mu}{3\hbar^2} (E + V_0) r_0^2 \dots$$

Setzt man  $r_0 = 0$ , so ist  $\Phi_D = 1$ . Man beachte jedoch, daß dies nur eine formale Eigenschaft der Gleichung für  $\Phi_D$  ist. Denn wegen Gültigkeit der Eigenwertgleichung nimmt  $V_0$  in gleichem Maß zu, wie  $r_0$  abnimmt, so daß der Grenzwert für  $n_0 k_0 r_0$  gleich  $\pi$  wird, wie im dritten Teil gezeigt wird. Ebenso ist der Grenzwert für  $k'' r_0$  Eins und nicht Null wegen obiger Beziehung. Berücksichtigt man dies, so wird

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \Phi_D = -\frac{\pi}{3} \frac{n_2^2}{n_2^2 - 1}.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß  $k''$  im Gegensatz zu  $k'$  nichts mehr mit der entsprechenden Eigenwertgleichung zu tun hat und daher keine physikalische Bedeutung besitzt.

Zum Schluß sei  $\Phi_D$  noch etwas vereinfacht:

$$= [1 - k'' r_0] \left\{ 1 - \frac{k_0^2 r_0^2}{3} \frac{V_2 + E}{V_2} \frac{1}{1 + k_0 r_0} [N^2 - 1] - \frac{k_0^2 r_0^2}{2} \frac{V_0 - V_2}{V_2} \frac{N}{1 + k_0 r_0} - \frac{k_0^2 r_0^2}{6} \frac{V_0 - V_2}{V_2} \frac{V_2 + E}{\varepsilon} N \right\} - \frac{k_0^2 r_0^2}{3} \frac{V_2 + E}{V_2} \left[ 1 + \frac{V_0 - \varepsilon}{\varepsilon} N^2 \right] + \frac{k_0^2 r_0^2}{6} \frac{V_0 - V_2}{V_2} \frac{V_2 + E}{\varepsilon} \frac{k_0^2 r_0^2 - 2(k_0 r_0 + 1)}{1 + k_0 r_0};$$

$$N = \frac{1}{1 - \frac{V_0 - V_2}{E + \varepsilon}}.$$

### 3. Diskussion der Eigenwertgleichung.

Die Energieschwelle des Photoeffektes beträgt 1,63 MeV. Dieser Wert muß also als Eigenwert der *Schrödinger*-Gleichung für  $l=1$  aufscheinen und muß daher Wurzel der transzendenten Gleichung

$$n_0 k_0 r_0 \operatorname{ctg} n_0 k_0 r_0 = 1 + (1 + k_0 r_0) n_0^2$$

sein. Dadurch ist zu jedem  $r_0$  die entsprechende Muldentiefe  $V_0$  berechenbar. Setzt man

$$r_0 \cdot 10^{13} = x; \quad \alpha = n_0 k_0 \cdot 10^{-13},$$

so lautet obige Eigenwertgleichung

$$\alpha x \operatorname{ctg} \alpha x = (1 + n_0^2) + n_0 \cdot \alpha x.$$

Zeichnet man die rechte und die linke Seite der Gleichung als Funktion von  $\alpha x$  auf, so braucht man nur für jeden  $V_0$ -Wert die entsprechende Gerade der rechten Seite einzutragen, bekommt einen Schnittpunkt  $\alpha x$ , woraus man das zu  $V_0$  gehörende  $r_0$  leicht berechnen kann. Da  $n_0 > 0$ , muß  $\alpha x > \pi$  gelten. Mit wachsendem  $V_0$ , bzw.  $\alpha$  rückt der Schnittpunkt gegen  $\pi$ , also  $x$ , bzw.  $r_0$  gegen Null. Mit  $V_0 \rightarrow \varepsilon$  geht  $\alpha x$  gegen 4,49 und daher  $r_0$  gegen Unendlich.

In Abb. 1 sind die Geraden für verschiedene  $\alpha$ -Werte eingezeichnet.

Für eine genaue Bestimmung von  $r_0$  ist dieses graphische Verfahren wegen der unscharfen Schnittpunkte ungeeignet. Für  $x$  ist die ungefähre Größenordnung bekannt: Man wird erwarten, daß  $x$  zwischen 3 und 5 liegt. Um eine Abschätzung für  $\alpha$  zu erhalten, kann man in erster Näherung nach der Formel

$$\alpha = \frac{\pi}{x}$$

rechnen. Für  $x=5$  ergibt dies  $\alpha=0,628$ , also  $V_0=10,85$  MeV. Die genaue Rechnung ergibt 12,09 MeV, für  $r_0=3 \cdot 10^{-13}$  cm

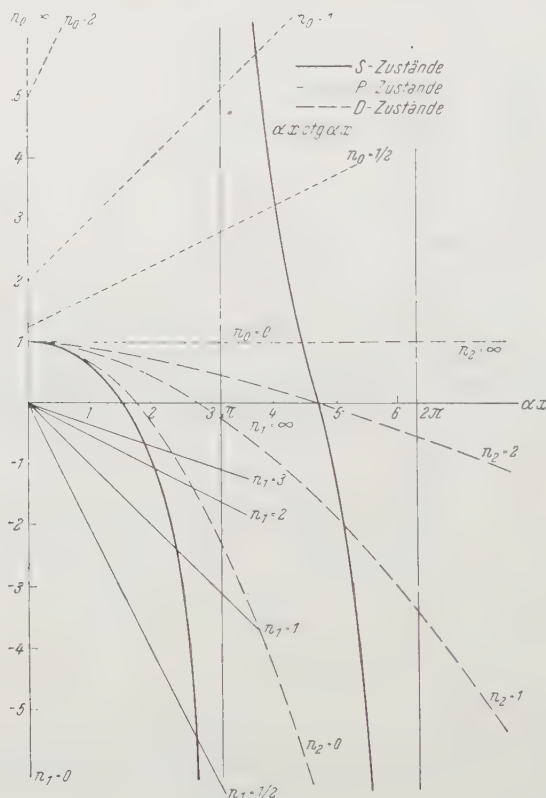


Abb. 1.

$V_0=28,92$  MeV. In Abb. 2 ist  $V_0$  als Funktion von  $r_0$  aufgetragen. Caldirola [12] rechnet mit  $V_0=11,96$  MeV, Guth und Mullin [10]

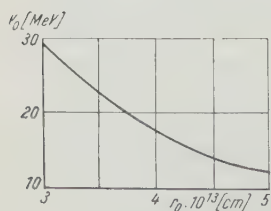


Abb. 2.

dagegen mit 12,16 MeV, beide für  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm. Zur Berechnung des Wertes 12,09 MeV wurde  $\mu=1,487 \cdot 10^{-24}$  g, also  $2 \mu/\hbar^2=2,698 \cdot 10^{30}$  abs. Einh., verwendet, für  $\varepsilon$  der schon erwähnte Wert von 1,63 MeV.

Von Wichtigkeit ist die Frage nach stabilen  $S$ - und  $D$ -Zuständen, da diese Potentialkonstanten erst aus den Experimenten rückgerechnet werden und es daher von vornherein nicht feststeht, ob diese gefundenen Funktionen stabile Niveaus zulassen oder nicht. Bezüglich der Diskussion der



Eigenwertgleichung für  $l=0$  vergleiche man *Sextl* [6], S. 134 oder die analytische Behandlung in *Rosenfeld* [13], S. 76. Für die vorliegende Aufgabe genügt die Feststellung, daß nur dann ein gebundener Zustand existiert, wenn

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} V_1 r_0^2 \geq \frac{\pi^2}{4}.$$

Die Eigenwertgleichung für den  $D$ -Zustand<sup>3)</sup>

$$\left[ \frac{n_2 k_2 r J_{3/2}(n_2 k_2 r)}{J_{3/2}(n_2 k_2 r)} \right]_{r=r_0} = \left[ \frac{i k_2 r H_{3/2}^{(1)}(i k_2 r)}{H_{3/2}^{(1)}(i k_2 r)} \right]_{r=r_0}$$

kann auf die Form

$$\alpha_2 x \operatorname{ctg} \alpha_2 x = 1 - \frac{(\alpha_2 x)^2 (n_2 + \alpha_2 x)}{(\alpha_2 x)^2 n_2 + 3(1 + n_2^2)(n_2 + \alpha_2 x)}$$

gebracht werden mit

$$\alpha_2^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_2 - \varepsilon_2) \cdot 10^{-26}; \quad x = r_0 \cdot 10^{13},$$

worin  $\varepsilon_2$  die Energie eines etwaigen gebundenen Zustandes ist. In Abb. 1 sind die Kurven der rechten Seite obiger Gleichung gestrichelt eingetragen. Setzt man  $\varepsilon_2 = 0$  ( $n_2 = \infty$ ), so erkennt man, daß nur dann ein gebundener Zustand für  $l=2$  existiert, wenn

$$\alpha_2 x \geq 4,4934.$$

Der Zahlenwert ist dabei die erste Lösung der Gleichung  $x = \operatorname{tg} x$ .

Wird  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm in allen Zuständen angenommen, so kann mit obigen Formeln die kleinste Potentialtiefe ermittelt werden, die noch zu gebundenen Zuständen führt. Man erhält für

$$\begin{aligned} l=0; & \quad V_1 = 2,3 \text{ MeV} \\ l=2; & \quad V_2 = 18,95 \text{ MeV.} \end{aligned}$$

#### 4. Diskussion der Resultate für den Übergang in den $S$ -Zustand.

Bei kleinen Energien der einfallenden  $\gamma$ -Strahlen wird der Übergang in den  $S$ -Zustand dominieren. Das wird in bekannter Weise durch die Wirkung des Zentrifugalterms in der *Schrödinger*-Gleichung bewirkt ([6], S. 135). Es liegt nahe, zuerst die Formel für gleiche Muldentiefe im Grund- und Endzustand zu untersuchen. Legt man sich dabei auf eine Kraftreichweite fest, so sind alle übrigen Potentialkonstanten bestimmt, zumindest wenn

<sup>3)</sup> Vergleiche wieder [6], S. 134.

diese Reichweite, wie in obigen Formeln, in allen Zuständen gleich sein soll. Man erhält so nach Gl. (1)

$$\sigma_S = C \cdot \frac{E^{1/2}}{(E + \varepsilon)^3 (E - \varepsilon')},$$

worin  $C$  einen Zahlenwert darstellt. Setzt man die Energien in MeV ein, so bekommt man für diese Konstante

$$C = \begin{cases} 8,628 \cdot 10^{-25} \dots r_0 = 5 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ 22,149 \cdot 10^{-25} \dots r_0 = 4 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ 77,818 \cdot 10^{-25} \dots r_0 = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \end{cases}$$

Abgesehen vom Zahlenwert  $C$ , der natürlich nur für die absolute Größe des Wirkungsquerschnittes verantwortlich ist, unterscheiden sich die drei Funktionen in dem Verlauf der Hilfsgröße

$$\varepsilon' = (E + V_1) \operatorname{ctg}^2 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V_1)} r_0.$$

Da  $V_0 = V_1$  so berechnet wurde, daß  $\varepsilon = 1,63$  MeV eine Lösung der Eigenwertgleichung für  $l=1$  ist und  $n_0 k_0 r_0$  stets größer als  $\pi$  ist, so muß erst recht  $n_1 k r_0 > \pi$  gelten. Aus Abb. 1 kann man dann den Verlauf von  $\varepsilon'$  entnehmen. Für  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm,  $E=0$  ist  $\varepsilon' = 49,401$  MeV und nimmt dann langsam ab. Bei  $E=1$  MeV ist  $\varepsilon'$  nur mehr 27,488 MeV, zwischen 8 und 9 MeV ist es Null. Für kleinere Kraftreichweiten ist  $\varepsilon'$  noch größer, bei  $r_0 = 3 \cdot 10^{-13}$  cm, z. B. für  $E=0$  704 MeV.

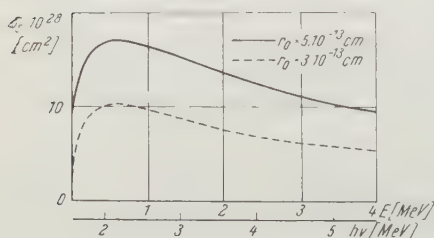


Abb. 3.  $\sigma_S$  für den Übergang  $P-S$  bei gleicher Muldentiefe im Grund- und Endzustand. Ausgezogene Linie für  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$ , gestrichelte Linie für  $r_0 = 3 \cdot 10^{-13}$  cm.

In Abb. 3 sind die Kurven  $\sigma_S$ , die für  $r_0 = 5$  und  $3 \cdot 10^{-13}$  cm folgen, eingetragen. Für  $r_0 = 4 \cdot 10^{-13}$  cm wird man selbstverständlich Werte erhalten, die zwischen den beiden erstgenannten liegen.  $\sigma_S$  erreicht für eine Relativenergie von etwa 0,7 MeV ein Maximum, also bei einer  $\gamma$ -Energie von 2,23 MeV. Die Größe des Maximums ist aber für beide Reichweiten verschieden, u. zw. für  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm um den Faktor 1,64 größer.

Eine Zusammenstellung älterer Experimente gaben Houtermans und Bartz [14], allerdings sind diese Angaben zur direkten Auswertung ungeeignet, weil die verwendeten  $\gamma$ -Strahlen nicht monoenergetisch waren und daher der gewonnene Wert von  $\sigma = 8,83 \pm 1,41 \cdot 10^{-28}$  cm nur einen Mittelwert für  $h\nu$  von 1,62 bis 2,42 MeV darstellt. Allerdings könnte man daraus schon schließen, daß  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm zu große Werte für  $\sigma$  gibt. Jedoch

zeigen die Experimente von *Russell, Sachs, Wattenberg* und *Fields* [9], daß auch die andere Kurve nicht mit der Erfahrung übereinstimmt, weil das erste Maximum (von  $\sigma_S$ ) bei viel kleineren  $\gamma$ -Energien liegen muß. Die genannten Forscher verlangen sogar ein Minimum für  $\gamma$ -Energien kleiner als 2,76 MeV. Gleiche Muldentiefe im Grund- und Endzustand kann also nicht zur Beschreibung der  $^8\text{Be}$ - $n$ -Wechselwirkung verwendet werden.

Dieser Umstand ist natürlich nicht verwunderlich. Es käme ja sehr überraschend, wenn die Wechselwirkung durch gleiche Potentialfunktionen beschrieben werden könnte, wenn andererseits die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen — z. B. Neutron und Proton — Austauschcharakter hat. Genau genommen müßte man auch die Aufspaltung des Grundzustandes in  $P_{3/2}$  und  $P_{1/2}$  berücksichtigen und beide Zustände durch verschiedene Potentialmulden beschreiben. Dann könnte man auch einen magnetischen Übergang berechnen (*Caldirola* [15]<sup>4)</sup>).

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes muß nun Gl. (2) herangezogen werden. Der Vorfaktor  $C$  bleibt derselbe wie in Gl. (1), nur die Größe  $r'$  kann jetzt so geändert werden, daß sowohl die Größe von  $\sigma_S$  wie auch die Lage des Maximums mit den Experimenten übereinstimmt. Für  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm, also  $V_0 = 12,09$  MeV erhält man

$$= 8,6281 \cdot 10^{-25} \frac{E^{1/2}}{(E + \epsilon)^3 (E + \epsilon')^2} \Phi_S^2$$

[Energien in MeV]

mit

$$\Phi_S = N^2 - D \cdot N [k' \cdot 10^{-12} + 1,5056] + 0,0290 (1 - N^2) \cdot [k' \cdot 10^{-12} + 2,6443]$$

und

$$N = \frac{1}{1 - \frac{V_0 - V_1}{E + \epsilon}}$$

Der Koeffizient  $D$  beträgt darin

$$D = \begin{cases} 0,18797 \dots & V_1 = 3 \text{ MeV} \\ 0,18176 \dots & V_1 = 3,3 \text{ MeV} \\ 0,16729 \dots & V_1 = 4 \text{ MeV} \end{cases}$$

In Abb. 4 sind die entsprechenden Kurven für  $V_1 = 3, 4$  und  $3,3$  MeV eingezeichnet. Der erste Wert wurde auch von *Guth*

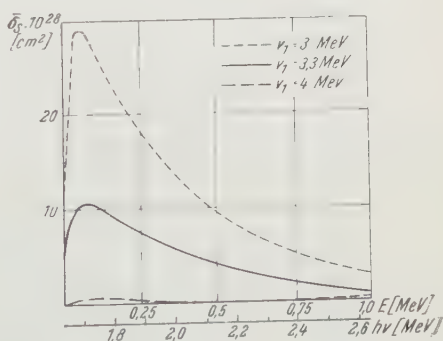


Abb. 4.  $\sigma_S$  für den Übergang  $P-S$  bei verschiedener Muldentiefe im Grund- und Endzustand.  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm,  $V_0 = 12,09$  MeV,  $V_1 = 3, 4$  und  $3,3$  MeV.

<sup>4)</sup> Zitiert nach *Guth* u. *Mullin* [10]. Nach den Angaben dieser Verfasser ist jedoch die Rechnung *Caldirolas* fehlerhaft, da er gleiche Potentialtiefen verwendet, was wegen der Orthogonalität der Wellenfunktionen zu verschwindendem Dipolmoment führen müßte. Trotzdem erhält *Caldirola* einen endlichen Wert für den Wirkungsquerschnitt.



und *Mullin* [10] benützt, jedoch geben die beiden Forscher die verwendeten Formeln nicht an. Es zeigt sich nun, daß zwischen den von *Guth* und *Mullin* erhaltenen Werten und den aus obiger Formel errechneten eine wesentliche Diskrepanz besteht.

Um die richtige Größe des Maximums zu erhalten, muß man  $V_1 = 3,3$  MeV annehmen. Für  $V_1 = 3$  MeV ist der errechnete Wirkungsquerschnitt um den Faktor 2,7 zu groß. Man erkennt daraus die große Empfindlichkeit von  $\sigma_S$  gegenüber Änderung von  $V_1$ .

Natürlich könnte man auch mit anderen Reichweiten einen Experimenten entsprechende Funktion  $\sigma_S$  berechnen. Bei dem Mangel an genauen Messungen dürfte aber eine Entscheidung für die eine oder andere Reichweite unmöglich sein.

Auf einen Umstand sei noch hingewiesen: Der Wirkungsquerschnitt erreicht bei etwas höheren Energien eine Nullstelle, die durch das Verschwinden des Faktors  $\Phi_S$  bewirkt wird. Die Nullstelle liegt für  $V_1 = 3$  MeV bei etwa  $E = 3$  MeV ( $h\nu = 4,63$  MeV), für  $V_1 = 4$  MeV bei etwa 0,7 MeV (2,33 MeV) und für  $V_1 = 3,3$  MeV bei etwa 2 MeV (3,63 MeV). Bei diesen Energien müßte aus der Winkelverteilung der emittierten Neutronen auf den Einfluß einer etwaigen magnetischen Dipolstrahlung geschlossen werden können. Bei noch höheren Energien geht  $\varepsilon$  gegen  $\infty$ ,  $\sigma_S$  erreicht jedoch einen endlichen Grenzwert. Für  $V_0 = V_1 = E + \varepsilon$  verliert die Formel überhaupt ihre Gültigkeit wegen

$$(n_0 k_0)^2 = (n_1 k)^2.$$

## 5. Diskussion der Resultate für den Übergang in den *D*-Zustand.

Wie schon erwähnt, soll für den *D*-Zustand die gleiche Muldentiefe wie für den *S*-Zustand verwendet werden, d. h. daß das Potential eine Funktion des Spiegelungscharakters ist. Das ist natürlich eine Einschränkung, die für eine genaue Rechnung kaum zulässig sein dürfte. Aber da dieser Anteil erst bei höheren  $\gamma$ -Energien von Einfluß ist, also in einem Gebiet, in dem ausreichende und genaue Messungen derzeit fehlen, wird man auf diese Weise wenigstens zu einer qualitativ brauchbaren Näherung kommen.

Setzt man also die entsprechenden Konstanten in Gl. (3) ein, so erhält man

$$\sigma_D = 4,314 \frac{1}{A^2 k^2 r_0^2 + (A - 1 + k'' r_0)^2} \frac{E^{1/2}}{(E + \varepsilon)^3 (V_2 + E)^2} \Phi_D^2 \cdot 10^{-25} \text{ [Energien in MeV]}$$

Für den Ausdruck  $A^2 k^2 r_0^2 + (A - 1 + k'' r_0)^2$  kann man, mit  $A = B - 1$ , dann

$$1,0725 \cdot E(B + 1)^2 + (B + k'' r_0)^2$$

schreiben, wenn  $E$  in MeV eingesetzt wird. Bezeichnet  $N$  den schon verwendeten Term, so bekommt man für

$$\Phi_D = [1 - k'' r_0] \{ 1 - 0,076 (V_2 + E) (N^2 - 1) - [1,003 + 0,476 (V_2 + E)] N \} - 0,177 (V_2 + E) (1 + 6,417 N^2) - 0,594 (V_2 + E) N.$$

Der Wirkungsquerschnitt als Funktion von  $E$ , bzw. der  $\gamma$ -Energie ist in Abb. 5 eingetragen. In Abb. 6 ist dann der resultierende Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \bar{\sigma}_S + \bar{\sigma}_D$$

gezeichnet.

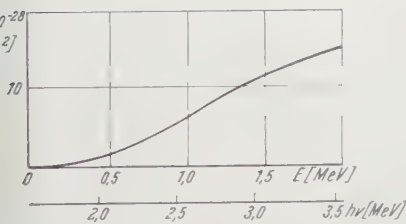


Abb. 5.  $\sigma_D$  für den Übergang  $P-D$ .  $V_0 = 12,09$  MeV,  $V_1 = 3,3$  MeV,  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm.

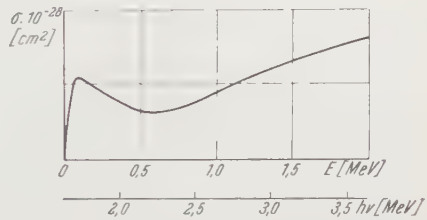


Abb. 6. Totaler Wirkungsquerschnitt  $\sigma = \bar{\sigma}_S + \bar{\sigma}_D$ .

Es sei noch erwähnt, daß nach den Bemerkungen am Schluß des dritten Teiles dieser Arbeit für die erhaltenen Potentialkonstanten ein gebundener  $S$ -Zustand existieren muß. Man erhält die Energie dieses Zustandes durch Einsetzen in die entsprechende Eigenwertgleichung. Der Wert beträgt etwa 0,18 MeV.

Die erhaltene Kurve stimmt im wesentlichen mit der von Guth und Mullin angegebenen überein.

Ich möchte nicht versäumen, Herrn Professor Dr. Th. Sexl für die Problemstellung, die zahlreichen Literaturhinweise und vor allem für die Erlaubnis zur Einsichtnahme in eine noch nicht veröffentlichte Arbeit zu danken.

### Literatur.

- [1] E. Guth, Physic. Rev. **55**, 411 (1939).
- [2] Th. Sexl, Acta Physica Austriaca **3**, 277 (1949).
- [3] E. Guth u. Ch. J. Mullin, Physic. Rev. **74**, 832 (1948).
- [4] G. Collins, B. Waldman u. E. Guth, Physic. Rev. **56**, 876 (1939).
- [5] F. Myers u. L. van Atta, Physic. Rev. **61**, 19 (1942).
- [6] Th. Sexl, Vorlesungen über Kernphysik, Wien, Fr. Deuticke, 1948,

S. 158.

- [7] E. Feenberg u. E. Wigner, Physic. Rev. **51**, 95 (1937).
- [8] L. R. Hafstad u. E. Teller, Physic. Rev. **54**, 681 (1938).

- [9] *B. Russell, D. Sachs, A. Wattenberg u. R. Fields*, *Physic. Rev.* **73**, 545 (1948).
- [10] *E. Guth u. Ch. J. Mullin*, *Physic. Rev.* **74**, 833 (1948).
- [11] *M. Camac u. H. Bethe*, *Physic. Rev.* **73**, 191 (1948).
- [12] *B. Caldirola*, *Nuov. Cim.* **4**, Nr. 12 (1947).
- [13] *L. Rosenfeld*, *Nuclear Forces*, Monographs on Theoretical and Applied Physics I, Amsterdam 1948.
- [14] *F. Houtermans u. I. Bartz*, *Physikal. Z.* **44**, 167 (1943).
- [15] *P. Caldirola*, *J. de phys. et rad.* **8**, 155 (1947).



## Über die Reichweite von Polonium- $\alpha$ -Strahlen in einigen Alkalihalogenid-Kristallen (NaCl, KCl, KBr und KJ).

Von

**Leopold Wieninger.**

II. Physikalisches Institut der Universität Wien.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 18. November 1949.)

Wie seit langem schon bekannt, verfärben sich die Alkalihalogenid-Kristalle bei Bestrahlung mit Röntgen-,  $\beta$ -,  $\gamma$ -Strahlen und ultraviolettem Licht. Mit Elektronenstrahlen wird nur eine verhältnismäßig dünne Schicht an der Kristalloberfläche verfärbt, deren Dicke eine Funktion der jeweiligen Elektronenenergie ist.

Es lag nun nahe, diese Kristalle durch Einwirkung von  $\alpha$ -Strahlen zu verfärben. In verhältnismäßig kurzen Zeitspannen konnten bei dem verwendeten Präparat (40.000 el. st. E.) hohe Verfärbungsintensitäten erzielt werden. Um die Zahl der an dieser Verfärbung beteiligten Farbzentren berechnen zu können, ist die genaue Kenntnis der Reichweite der Po- $\alpha$ -Strahlen in den betreffenden Kristallen notwendig.

### Durchführung der Messungen.

Die Eigenschaften der  $\alpha$ -Strahlen, Alkalihalogenid-Kristalle zu verfärben, wurde zur direkten Messung ihrer Reichweiten in diesen Kristallen verwendet. *E. Rutherford* und *J. Joly*<sup>1)</sup> hatten 1910 die Reichweite von  $\alpha$ -Strahlen in Glas auf Grund der verfärbenden Wirkung der Bestrahlung bestimmt.

Kleine Spaltstücke der Kristalle wurden in einer Einspannvorrichtung so über das Po-Präparat gebracht, daß die Strahlenausbeute unmittelbar über dem Präparat möglichst groß war. In Abb. 1 ist die Anordnung schematisch wiedergegeben. Die ganze Bestrahlungsvorrichtung wurde lichtdicht (zur Vermeidung

<sup>1)</sup> *E. Rutherford* u. *J. Joly*, Phil. Mag. (6) 19, 192 (1910).

einer Entfärbung der Kristalle durch Lichteinwirkung) in einen Exsikkator gebracht, der evakuiert werden konnte. Die Bestrahlung im Vakuum ist wegen der Bildung von Mikrokristallen an der Kristalloberfläche<sup>2)</sup>, die bei allen Verfärbungsversuchen, wie besonders bei diesen Reichweitenmessungen, störend wirken, notwendig.

Nach der Bestrahlung wurden die verfärbten Kristalle mitten durch das verfärbte Gebiet gespalten (Abb. 2). Senkrecht zu diesen Spaltflächen konnten dann im Mikroskop im durchfallenden Licht die Reichweiten gemessen werden.

Es lag nun der Einwand nahe, daß bei der Bestrahlung, entsprechend der Geometrie der Anordnung, sehr wenige  $\alpha$ -Teilchen senkrecht auf den Kristall auftreffen werden. So wäre eine Verkürzung der Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen im Kristall vorgetäuscht. Wählt man aber die Bestrahlungszeiten genügend groß, d. h. wird dem Kristall eine hinreichend große Zahl von  $\alpha$ -Teilchen zugeführt, erscheint die Verfärbung im Kristall vollständig homogen.

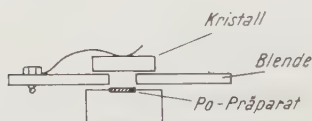


Abb. 1.

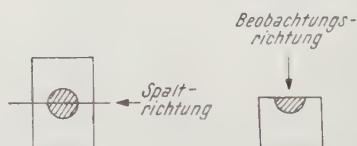


Abb. 2.

Es wurden diesbezüglich an Kristallstücken Kontrollmessungen durchgeführt. Die einzelnen Stücke wurden verschieden lange bestrahlt, u. zw. 3, 6, 12, 24, 48 und 72 Stunden. Bei der Bestrahlung mit der eingangs genannten Präparatstärke konnte von einer Bestrahlungsdauer von 6 Stunden an kein Unterschied in der Reichweite im Kristall mehr festgestellt werden. Dieses Ergebnis ist auch durchaus verständlich, da die Verfärbung der Kristalle nach anfänglich raschem Anstieg nur mehr langsam einem Sattwert zustrebt. Alle für die Messung von Reichweiten verwendeten Kristalle waren einer Bestrahlungsdauer von 24 bis 48 Stunden ausgesetzt. Die Tiefe der Verfärbung von der bestrahlten Kristallfläche an kann also mit Sicherheit der Reichweite der senkrecht auf den Kristall auftreffenden  $\alpha$ -Teilchen gleichgesetzt werden.

Die Messung der Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen in den verschiedenen Kristallen erfolgte mittels eines Mikroskops im durchfallenden Licht. Einem Teilstrich im Okularmikrometer entsprachen  $1,944 \cdot 10^{-4}$  cm. Dieser Wert ist der Mittelwert aus einer großen Zahl von Eichmessungen. Die Tubuslänge wurde mit 160 mm bei allen Messungen konstant gehalten.

<sup>2)</sup> L. Wieninger u. N. Adler, Formation of Microscopic Crystals on Crystal Surfaces exposed to  $\alpha$ -Rays. Nature 163, 989 (June 25, 1949).

Die Meßgenauigkeit kann, da die Verfärbungsgrenze im Kristall sehr scharf ist, mit  $\pm 0,25$  Teilstrichen des Okularmikrometers angegeben werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Messungen an den KJ-Kristallen erschwert waren, da die Farbzentren dieser Kristalle nicht sehr stabil sind. (Es tritt schon bei Tageslicht Entfärbung ein.) Wiederholt konnte bei zu starker Mikroskopbeleuchtung die Entfärbung der Kristalle beobachtet werden, bevor noch die Reichweite bestimmt worden war.

### Theoretischer Teil.

Die theoretische Berechnung der Reichweite von  $\alpha$ -Strahlen in Materie nach der *Bohrschen Theorie*<sup>3)</sup>

$$-v^3 \frac{dv}{dx} = K_1 \frac{\rho N}{A} \left( \ln v^3 - \frac{1}{N} \sum \ln v + K_2 \right) \quad (1)$$

( $\rho$ ,  $A$ ,  $v$  = Dichte, Atomgewicht und Absorptionsfrequenz des absorbierenden Mediums)

ist nach *Bohr* für  $\alpha$ -Strahlen mit einer Geschwindigkeit von  $2 \cdot 10^9$  cm sec<sup>-1</sup> bis zu Elementen mit der Atomnummer  $N=10$  gut anwendbar. Für schwerere Elemente, bzw. kleinere Geschwindigkeiten ist diese Formel zur Berechnung von Reichweiten unbrauchbar.

Eine gewisse Erweiterung dieser engen Grenzen bedeutet die halbempirische Formel von *Rosenblum* und *Flamm*<sup>4)</sup>:

$$R = \frac{c^2}{C^2} = c_2 \frac{A}{\rho N} \cdot \frac{v_0^4}{K_1 \left( \ln v_0^3 - \frac{1}{N} \sum \ln v + K_2 \right)} \quad (2)$$

$$C_2 = \frac{3 K_1}{v_0^4} \cdot \frac{\rho N}{A}$$

Aber auch hier stimmen die berechneten Werte für die Reichweiten von  $\text{RaC}'$  nur bis zu den Elementen der Atomnummer  $N=20$  mit dem Experiment überein.

Für kleinere Anfangsgeschwindigkeiten der  $\alpha$ -Strahlen, wie für die  $\text{Po-}\alpha$ -Strahlen, ist das theoretische Formelmateriale unbrauchbar zur Reichweitenbestimmung in Materie. Das Bremsvermögen  $s$  von  $\text{Cl}$  für  $\text{Po-}\alpha$ -Strahlen, nach Gl. (2) errechnet, weicht vom gemessenen Wert um 22% ab.

Es wurde wiederholt versucht, empirisch eine Gesetzmäßigkeit bezüglich Bremsvermögen und Atomkonstanten zu

<sup>3)</sup> Handbuch der Experimentalphysik, Bd. XV, S. 501.

<sup>4)</sup>  $v = R \frac{N^2}{k^2}$  ( $R$  = Rydbergfrequenz,  $N$  = Atomnummer,  $k$  = Hauptquantenzahl).

finden. Am geeignetsten von allen Versuchen scheint die Relation zwischen Bremsvermögen und Atomnummer nach *J. L. Glasson*<sup>5)</sup> zu sein; sie lautet:

$$s = N^{-2/3} = \text{const.} \quad (3)$$

Für chemische Verbindungen, um die es sich in dieser Arbeit vor allem handelt, erweist sich das Bremsvermögen als Summe der Bremsvermögen der einzelnen an der Verbindung beteiligten Elemente. Das heißt

$$s = \sum s_i \quad (4)$$

wenn  $s$  das „molekulare“ Bremsvermögen ist und  $s_i$  die Bremsvermögen der einzelnen am Molekülbau beteiligten Atome bedeuten.

Ist das Bremsvermögen und die Reichweite eines Stoffes bekannt, so kann mittels der Beziehung

$$s = \frac{\rho \cdot d \cdot A'}{\rho' \cdot d' \cdot A} \quad (5)$$

( $d, d'$  Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen im bekannten und im unbekannten Medium) die Reichweite im unbekannten Medium berechnet werden. Als Vergleichsmedium mit  $s=1$  wurde in diesem Falle Luft (15°C und 760 mm Hg) genommen.

### Ergebnisse.

Die an den einzelnen Alkalihalogenid-Kristallen gemessenen Reichweiten sind Mittelwerte, die aus einer großen Zahl von Messungen an vielen Spaltstücken erhalten wurden. Die Meßergebnisse sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Kristall	Teilstriche im Okularmikrometer	Reichweite der Po- $\alpha$ in $10^{-4}$ cm	Fehler
NaCl	15,0 $\pm$ 0,25	29,16	$\pm$ 1,7%
KCl	17,0 $\pm$ 0,25	33,05	$\pm$ 1,5%
KBr	15,75 $\pm$ 0,25	30,62	$\pm$ 1,6%
KJ	15,5 $\pm$ 0,25	30,13	$\pm$ 1,6%

Aus den so gemessenen Reichweiten kann unter Zuhilfenahme der Gl. (3), (4) und (5) das Bremsvermögen der einzelnen wie auch das der beteiligten Elemente bestimmt werden. Aus einer Reihe von bekannten Meßwerten konnte die Größe der

<sup>5)</sup> *J. L. Glasson*, Phil. Mag. (6) 43, 477 (1921).



Konstanten der Gl. (3) mit 0,2704 gemittelt werden. Das Bremsvermögen für  $\text{Cl}_2$  wurde mit 1,78<sup>6)</sup> eingesetzt. Mit Benützung dieser beiden Größen kann nunmehr das Bremsvermögen der untersuchten Kristalle berechnet werden. In Tab. 2 ist eine Gegenüberstellung der durch Messung und der durch Rechnung erhaltenen Werte wiedergegeben.

Tabelle 2.

Kristall	Bremsvermögen		Reichweite	
	gemessen	gerechnet	gemessen	gerechnet
KCl	$3,78 \pm 1,5^0/0$	3,70	$33,05 \mu \pm 1,5^0/0$	33,88 $\mu$
NaCl	$3,09 \pm 1,7^0/0$	3,12	$29,16 \mu \pm 1,7^0/0$	28,96 $\mu$
KBr	$4,72 \pm 1,6^0/0$	4,74	$30,62 \mu \pm 1,6^0/0$	30,52 $\mu$
KJ	$5,72 \pm 1,6^0/0$	5,80	$30,13 \mu \pm 1,6^0/0$	30,69 $\mu$
Na	1,32	1,34		
K	2,00	1,93		
Br	2,72	2,81		
J	3,72	3,87		

Vergleiche mit Ergebnissen anderer Autoren können nicht gebracht werden, da sich alle bekannten Messungen von Bremsvermögen und Reichweiten auf die  $\alpha$ -Strahlung von  $\text{RaC}'$  beziehen, das Bremsvermögen einer Substanz aber nur charakteristisch für  $\alpha$ -Strahlen bestimmter Anfangsgeschwindigkeiten ist.

### Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Reichweite von Po- $\alpha$ -Strahlen in NaCl, KCl, KBr und KJ auf Grund ihrer verfärbenden Wirkung in den Kristallen direkt gemessen. Die Reichweiten in den Salzen sind entsprechend obiger Reihenfolge: 29,16  $\mu$ , 33,05  $\mu$ , 30,62  $\mu$  und 30,13  $\mu$ . Der Fehler bei allen Werten liegt unter  $\pm 2^0/0$ .

Desgleichen wurde auf Grund dieser Messungen das „molekulare“ Bremsvermögen der Verbindungen, auf die Basis Luft (15 $^0$  C und 760 mm Hg) bezogen, berechnet.

Weiter wurde das atomare Bremsvermögen für Po- $\alpha$ -Strahlen der an den Verbindungen beteiligten Elemente, basierend auf  $s_{\text{Cl}} = 1,78$ , bestimmt.

<sup>6)</sup> Aus St. Meyer u. E. Schweidler, Radioaktivität, Teubner 1927.

# Ferromagnetische Eigenschaften halboxydischer Eisen- und Eisen-Kobalt-Pulver<sup>\*)</sup>.

Von

F. Lihl, Wien.

Mit 14 Abbildungen.

(Eingelangt am 13. Dezember 1949.)

Durch Reduktion leicht zersetzlicher Eisensalze bei niedrigen Temperaturen werden äußerst feinkörnige Pulver erhalten, aus denen nach den in der Pulvermetallurgie üblichen Verfahren Preßlinge beliebiger Form hergestellt werden können. Setzt man diese Körper ohne nachträgliche Wärmebehandlung, wie Sintern, der Wirkung eines starken Magnetfeldes aus, dann behalten sie nach Wegnahme des äußeren Feldes ihre magnetischen Eigenschaften bei. Auf diese Weise gelingt es, auf der Basis Reinsteißen ohne jeden Legierungszusatz Permanentmagnete herzustellen, deren Koerzitivkraft in der Nähe der bei hochwertigen Dauermagnetlegierungen erreichbaren Größe liegt.

Die hohe Koerzitivkraft dieser Pulverpreßmagnete hängt, wie später erörtert werden wird, von verschiedenen Faktoren ab. Der Einfluß der Kristallgröße und Dichte der Preßlinge auf die Koerzitivkraft ist bereits erfaßt und kann durch die Néel'sche Theorie quantitativ wiedergegeben werden. Hingegen liegen über den Einfluß der Höhe des Reduktionsgrades auf Koerzitivkraft, Remanenz und Energiewert bisher noch keine systematischen Untersuchungen vor. Der Klärung dieser Frage mögen die nachfolgend besprochenen Versuche dienen.

## I. Halboxydische Eisenpulver.

Wie Verfasser<sup>1)</sup> zeigen konnte, entsteht bei der thermischen Zersetzung von Eisen (II)-formiat oder Eisen (II)-oxalat ein kohlenstoffhaltiges Oxyd, dessen Eisengehalt dem der Verbindung FeO entspricht. Dieses Eisenoxyd ist ferromagnetisch, besitzt zum Unterschied von dem bekannten im Steinsalzgitter kristallisierenden FeO dieselbe Struktur wie Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> und ist nur bei Vor-

<sup>\*)</sup> Aus einem Vortrag, gehalten am 21. Oktober 1949 im Verein Österreichischer Chemiker.

handensein einer bestimmten Mindestmenge Kohlenstoff im Gitter stabil. Verfasser nennt dieses Oxyd  $\gamma$ -FeO, in Analogie zum  $\gamma$ -Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Die Untersuchung des Reduktionsverlaufes von Eisen(II)-formiat und Eisen(II)-oxalat ergab, daß der Reduktionsgrad<sup>2)</sup> außer von der Reduktionstemperatur in hohem Maße von der Strömungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs je Gramm Substanz abhängt, in der Richtung, daß mit Erhöhung der Reduktionstemperatur oder Vergrößerung der Strömungsgeschwindigkeit des reduzierenden Gases der Reduktionsgrad zunimmt. Um zu Pulvern möglichst feinkörnigkeit zu gelangen und eine Koagulation der Körner hintanzuhalten, ist somit nötig, die Reduktion bei möglichst niedriger Temperatur vorzunehmen und die Reduktionszeit durch Regulieren des Wasserstoffstromes auf ein Mindestmaß zu beschränken.

Die oxydischen und metallischen Pulver besitzen, sofern die thermische Behandlung bei genügend tiefen Temperaturen vorgenommen wird, pyrophore Eigenschaften, d. h. sie verbrennen, sobald sie mit Luft in Berührung gebracht werden, unter starker Wärmeentwicklung spontan zu Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, u. zw. entsteht die ferromagnetische Modifikation dieses Oxyds, das  $\gamma$ -Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Die Pyrophorität dieser Feinstpulver ist nach Ansicht des Verfassers<sup>3)</sup> auf eine Adsorption des stets bei der thermischen Zersetzung entstehenden Wasserstoffs an der Oberfläche der Pulverkörner zurückzuführen. Kommt dieses Pulver mit der Luft in Berührung, dann tritt Reaktion des Luftsauerstoffs mit dem Wasserstoff am Kontakt unter Bildung von H<sub>2</sub>O ein, wobei eine beträchtliche Wärmemenge frei wird, die den Verbrennungsvorgang einleitet. Es gelingt nun auf sehr einfache Weise, diese für jegliche Untersuchung unangenehme Eigenschaft der Feinstpulver zu beseitigen, indem man den Wasserstoff durch eine Flüssigkeit guter Benetzungsfähigkeit, die natürlich keine Reaktion mit dem Pulver zeigen darf, von der Oberfläche der Pulverkörner verdrängt. In dieser Hinsicht hat sich Benzol sehr gut bewährt. Derart behandelte Pulver zeigen auch in vollkommen trockenem Zustand keine Neigung zur Selbstentzündung mehr.

Je nach der Dauer des Reduktionsprozesses gewinnt man Pulver, die neben metallischem Eisen noch eine entsprechende Menge Oxyd enthalten, halboxydische Pulver, die somit aus einem Gemenge von metallischem Eisen und einem kohlenstoffhaltigen Oxyd der Zusammensetzung FeO ( $\gamma$ -FeO) bestehen. Unter gewissen Bedingungen kann auch neben diesem  $\gamma$ -FeO das im Steinsalzgitter kristallisierende  $\alpha$ -FeO gebildet werden, so daß

<sup>1)</sup> F. Lihl, Monatsh. für Chemie 81, 632—646 (1950).

<sup>2)</sup> Unter Reduktionsgrad wird die nach einer bestimmten Zeit vorhandene Menge an freiem metallischem Eisen, ausgedrückt in Gewichtsprozenten des Gesamtpulvers, verstanden.

<sup>3)</sup> F. Lihl, l. c.

dann neben metallischem Eisen noch zwei Oxyde verschiedener Struktur, jedoch gleichen Eisengehaltes vorliegen.

Zur Untersuchung des Einflusses des Reduktionsgrades auf die Höhe der magnetischen Kennziffern dienten Pulver, die durch stufenweise Reduktion von Eisen (II)-formiat bei 350°, bzw. 300° C im Wasserstoffstrom hergestellt worden waren. Die Strömungsgeschwindigkeit des reduzierenden Gases betrug 1,4 cm<sup>3</sup> gsec. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt.

Tabelle 1. Eisen(II)-formiat, reduziert bei 350° C.

Probe Nr.	Reduk- tionszeit Minuten	Metalli- sches Fe %	Dichte der Preßlinge g/cm <sup>3</sup>	$JH_c$ Örsted	$BH_c$ Örsted	$BR$ Gauß	$G$ erg/cm <sup>3</sup>
1	15	0,9	3,0	190	175	1420	3.180
2	30	14,2	3,3	251	230	2000	5.700
3	62	58,5	3,8	357	330	3150	12.580
4	70	69,5	3,9	354	328	3460	13.600
5	84	80,3	4,1	303	290	4100	15.620
6	100	89,0	4,3	267	258	4320	14.850
7	120	89,9	4,5	215	210	4400	12.260
8	180	91,6	4,55	160	156	4340	8.840

Tabelle 2. Eisen(II)-formiat, reduziert bei 300° C.

Probe Nr.	Reduk- tionszeit Minuten	Metalli- sches Fe %	Dichte der Preßlinge g/cm <sup>3</sup>	$JH_c$ Örsted	$BH_c$ Örsted	$BR$ Gauß	$G$ erg/cm <sup>3</sup>
1	60	13,5	3,2	279	252	1960	5.980
2	90	32,2	3,4	350	315	2570	9.380
3	120	58,4	3,8	390	360	3430	15.000
4	150	80,8	3,9	368	348	3950	17.680
5	170	84,2	4,0	351	334	3970	17.230
6	183	84,9	4,0	338	320	4000	16.300
7	240	89,1	4,0	305	292	4075	15.630

Die ersten beiden Spalten dieser Tabellen vermitteln den Zusammenhang zwischen Reduktionszeit und Reduktionsgrad. Die graphische Darstellung dieser Abhängigkeit ist aus Abb. 1 zu ersehen.

Zwecks Vornahme der magnetischen Messungen<sup>4)</sup> wurden aus diesen Pulvern mit einem Preßdruck von 8 t/cm<sup>2</sup> Stäb-

<sup>4)</sup> Die magnetischen Messungen, vorgenommen nach der ballistischen Joch-Spannungsmessermethode, wurden im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen ausgeführt, wofür den beteiligten Herren an dieser Stelle bestens gedankt sei. Die Magnetisierungsfeldstärke betrug 2200 bis 2500 Örsted.



chen der Abmessungen  $4 \times 4 \times 50$  mm hergestellt. Wegen der überaus großen Feinkörnigkeit der Pulver und der dadurch bedingten geringen Füllichte (größenordnungsmäßig 0,5 bis  $1,0 \text{ g cm}^3$ ) sind naturgemäß weit größere Füllhöhen erforderlich gegenüber einem Verpressen normaler Eisenpulver der Pulvermetallurgie. Da beim Verpressen dieser Feinstpulver Schwierigkeiten auftraten, kam bei allen Versuchen ein Bindemittel in Anwendung. Dadurch sind auch die verhältnismäßig niedrigen Werte für die Remanenz bedingt. Wie aus den beiden Tabellen

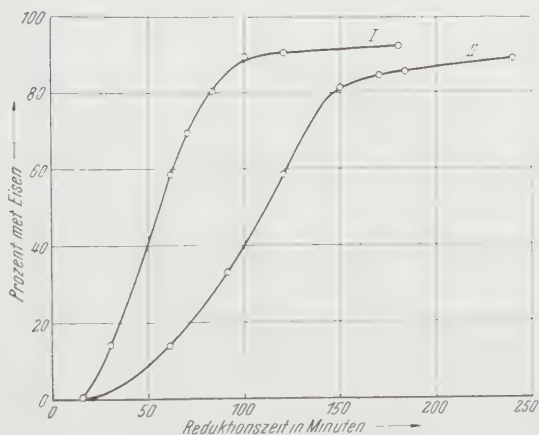


Abb. 1. Abhängigkeit des Reduktionsgrades von der Reduktionszeit.  
 Kurve I ..... Reduktionstemperatur  $350^{\circ} \text{C}$ ,  
 Kurve II ..... Reduktionstemperatur  $300^{\circ} \text{C}$ .

(Spalte 4) zu erkennen ist, steigt die Dichte der Preßlinge mit der Höhe des Reduktionsgrades an. Die Dichteangabe bezieht sich dabei auf die absolute Dichte des Preßlings mit Einschluß der oxydischen und Bindemittelanteile.

In den weiteren Spalten der obigen Zahlentafeln sind die Werte für die Koerzitivkraft ( $JH_c$ , bzw.  $BH_c$ ), die Remanenz  $B_R$  und den Energiewert  $G$  eingesetzt. Die graphische Darstellung der Abhängigkeit dieser magnetischen Kennziffern von der Reduktionszeit ist aus den Abb. 2 und 4 zu ersehen, während in den Abb. 3 und 5 die zugehörigen Entmagnetisierungskurven wiedergegeben sind.

Abb. 2 (Reduktionstemperatur  $350^{\circ} \text{C}$ ) läßt erkennen, daß die Koerzitivkraft mit der Reduktionszeit von einem Anfangswert von 190 Örsted, entsprechend dem rein oxydischen Pulver, ziemlich steil auf einen Höchstwert von 360 Örsted ansteigt, um dann wieder ungefähr ebenso steil abzufallen. Die Remanenz nimmt von einem Anfangswert von 1400 Gauß auf 4400 Gauß

zu und bleibt dann praktisch konstant. Da der Höchstwert der Remanenz später erreicht wird als das Maximum der Koerzitivkraft, verschiebt sich das

Maximum der Energiewertes ( $G_{\max} = 1600 \text{ erg/cm}^3$ ) gegenüber dem Höchstwert der Koerzitivkraft nach rechts.

Abb. 4 (Reduktionstemperatur  $300^\circ \text{C}$ ) zeigt prinzipiell den gleichen Kurvenverlauf. Die Maxima der Kurven für  $jH_c$  und  $G$  sind allerdings viel flacher und liegen auch höher als im vorhin besprochenen Fall ( $jH_c = 390 \text{ Örsted}$ ,  $G_{\max} = 17.800 \text{ erg/cm}^3$ ). Ferner ist der Abfall der Kurven weniger steil als in Abb. 2.

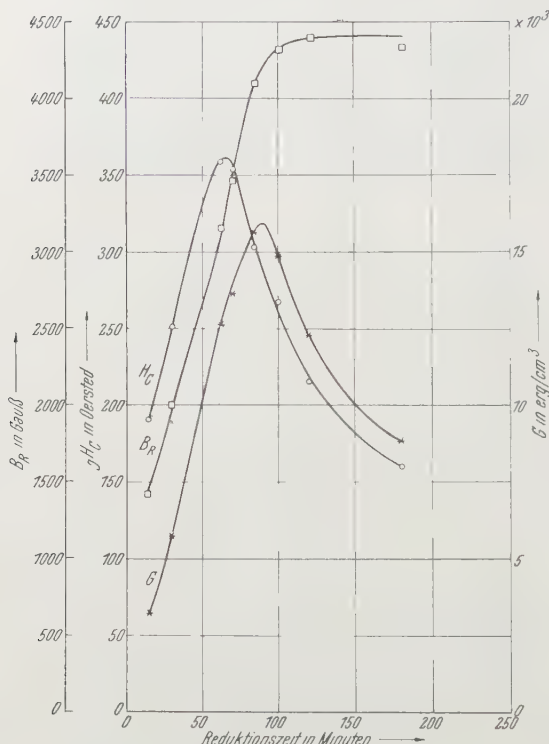


Abb. 2. Abhängigkeit der Koerzitivkraft  $jH_c$ , der Remanenz  $B_R$  und des Energiewertes  $G$  für Preßlinge aus Feinstpulvern, hergestellt durch Reduktion von Eisenformiat bei  $350^\circ \text{C}$ .

Vergleicht man die Abb. 2 und 3 mit Abb. 1, dann erkennt man, daß unabhängig von der Reduktionstemperatur das Maximum der Koerzitivkraft bei ungefähr 65%, das Maximum des Energiewertes bei etwa 85% metallisches Eisen liegt. Der optimale Wert für  $H_c$  und  $G$  wird somit nicht dann erreicht, wenn das Pulver vollständig reduziert ist, also nur metallisches Eisen vorliegt, sondern dann, wenn noch eine beträchtliche Oxydmenge vorhanden ist. Eine Erklärung für diese Gesetzmäßigkeit wird



Abb. 3. Entmagnetisierungskurven, aufgenommen an Preßlingen aus Feinstpulvern, hergestellt durch Reduktion von Eisenformiat bis  $350^\circ \text{C}$ . (Die bei den Kurven vermerkten Zahlen beziehen sich auf die Probenbezeichnung gemäß Tabelle 1.)

in Abschnitt IV gegeben. Man erkennt ferner, daß Koerzitivkraft und Remanenz nicht allein vom Reduktionsgrad abhängen sondern bei gleichem Reduktionsgrad um so höhere Werte erreichen, je niedriger die Reduktionstemperatur gewählt wird.

## II. Halboxydische Eisen-Kobalt-Pulver.

Bekanntlich kann durch Legieren des Eisens mit anderen Metallen, wie insbesondere Kobalt, eine beträchtliche Erhöhung der Koerzitivkraft und des Energiewertes erreicht werden. Deshalb war weiter von Interesse,

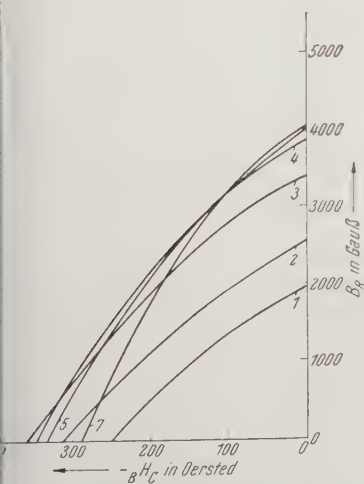


Abb. 5. Entmagnetisierungskurven, aufgenommen an Preßlingen aus Feinstpulvern, hergestellt durch Reduktion von Eisenformiat bei 300° C. (Die bei den Kurven vermerkten Zahlen beziehen sich auf die Probenbezeichnung gemäß Tabelle 2.)

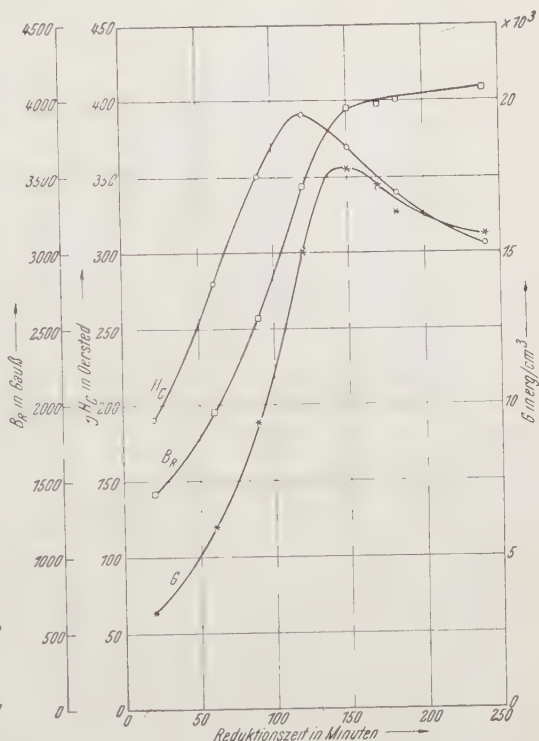


Abb. 4. Abhängigkeit der Koerzitivkraft  $J_{Hc}$ , der Remanenz  $B_R$  und des Energiewertes  $G$  für Preßlinge aus Feinstpulvern, hergestellt durch Reduktion von Eisenformiat bei 300° C.

festzustellen, inwieweit sich die magnetischen Kennziffern der Feinstpulver durch Kobaltzusatz ändern.

Für die Herstellung solcher Legierungspulver scheidet der übliche Weg der Legierungsbildung in der Schmelzphase aus, da durch Pulverisierung kompakter Stücke nie die erforderliche Feinkörnigkeit erzielt werden kann.

Um zu Legierungsfeinstpulvern

zu gelangen, muß ein gänzlich neuer Weg beschritten werden. Wie die Röntgenuntersuchung lehrt, sind die Gitter der For-

miate des Mangans, Eisens, Kobalts und Nickels isomorph (Abb. 6). Versuche ergaben ferner, daß diese vier Formiate paarweise lückenlose Mischkristallreihen bilden. Als weitere Folgerung lag nun die Annahme nahe, daß durch Reduktion dieser Mischkristalle metallische Mischkristalle entstehen. Dies ist tatsächlich der Fall bei den drei binaren Systemen Eisen-Kobalt, Eisen-Nickel und Kobalt-Nickel, jedoch nicht in den Systemen mit Mangan. Eisen-Mangan-formiat-Mischkristalle zerfallen he-

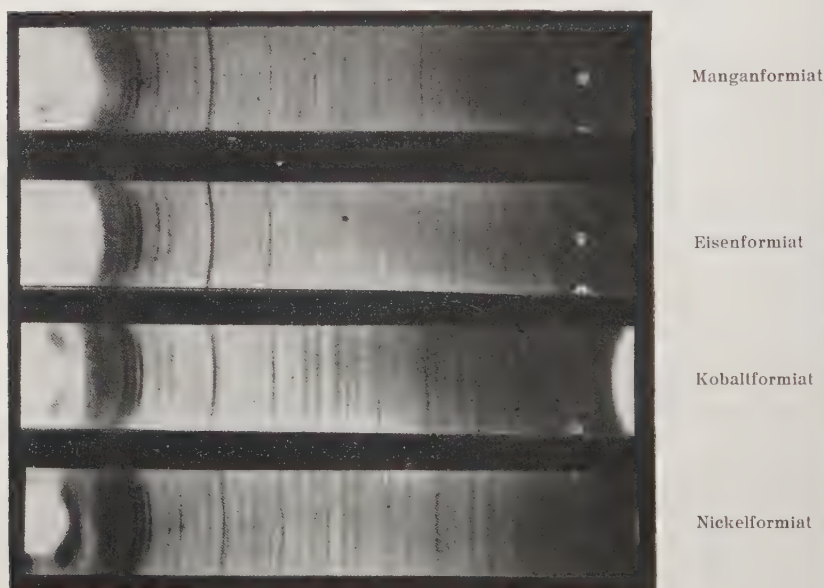


Abb. 6. Debye-Scherrer-Diagramme von Formiaten, aufgenommen mit Cr-K-Strahlung.

terogen. Die Ursache für das verschiedene Verhalten der Formiat-Mischkristalle im System Eisen-Mangan dürfte einerseits auf die große Affinität des Sauerstoffs zu Mangan, andererseits darauf zurückzuführen sein, daß die thermische Zersetzung der Formiate über ein im Spinelltyp kristallisierendes Oxyd verläuft und bei den Oxyden des Mangans dieser Strukturtypus nicht vorkommt. Bei den drei vorher genannten binaren Systemen erstreckt sich jedoch die Mischbarkeit bis zu den metallischen Legierungspulvern, also bis zur Endstufe der Reduktion.

Auf der Tatsache, daß diese Legierungspulver bei verhältnismäßig niedriger Temperatur (250—300° C) erhalten werden können, beruht ein vom Verfasser vorgeschlagenes Verfahren zur Bestimmung der Gleichgewichte in metallischen Systemen<sup>5)</sup>. Da diese Legierungspulver bereits bei der Zersetzungstempe-



ratur der Formiate entstehen, werden die gegenüber der üblichen Herstellung der Legierungen auf dem Schmelzweg beim Abkühlen stets eintretenden Gleichgewichtsstörungen, die die Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichtes unmöglich machen, vermieden. Bei Anwendung dieses Verfahrens auf die Systeme Eisen-Kobalt, Eisen-Nickel und Kobalt-Nickel wurde ein gegenüber den entsprechenden Zustandsdiagrammen völlig anderer Verlauf der Umwandlungskurven gefunden. Hinsichtlich weiterer Einzelheiten sei auf die Originalarbeit verwiesen.

Die Herstellung der Eisen-Kobalt-formiat-Mischkristalle erfolgt am besten durch Lösen der einfachen Formiate im entsprechenden Gewichtsverhältnis in verdünnter Ameisensäure, Eindampfen der Lösung bis zum Beginn der Kristallisation und Ausfällen der bei Raumtemperatur übersättigten Lösung durch rasches Abkühlen. Die auf diese Weise gebildeten Mischkristalle werden dann getrocknet und einem Reduktionsprozeß im Wasserstoffstrom unterworfen, wobei ein Legierungspulver der erforderlichen Feinkörnigkeit entsteht, das noch eine von der Reduktionszeit und Reduktionstemperatur abhängige Oxydmenge enthält. Da Kobaltformiat bereits bei niedrigerer Temperatur zersetzt wird als Eisenformiat und bei der Zersetzung bereits zum größten Teil (bis zu 80%) in die metallische Form übergeht, also der Anteil des Kobaltoxyds verhältnismäßig klein ist, verläuft auch bei Eisen-Kobalt-formiat-Mischkristallen die Reduktion, insbesondere am Beginn der Reaktion, rascher und weitgehender als unter den gleichen Bedingungen bei Eisenformiat. Die Reduktion erfolgte unter Variation der Zeit vornehmlich bei 300° C. Um den Einfluß der Reduktionstemperatur auf die magnetischen Kennziffern zu erfassen, wurden weiters einige Pulver mit höherem Kobaltgehalt bei höheren Temperaturen (325, bzw. 350° C) reduziert.

Die mit verschiedenem Reduktionsgrad hergestellten Pulver wurden nun, wie bereits in Abschnitt I erwähnt, zu Stäbchen verpreßt und die Entmagnetisierungskurven aufgenommen. Das Ergebnis dieser Messungen ist in Tab. 3 zusammengestellt.

Zu dieser Tabelle ist noch folgendes zu bemerken: Wie aus den Werten für die Remanenz  $B_R$  zu erkennen ist, liegen diese für die Proben 3, 6 und 12 trotz des hohen Reduktionsgrades verhältnismäßig niedrig. Die Remanenz würde sogar in einigen Fällen mit Erhöhung des Reduktionsgrades absinken. Dies ist, wie eine genauere Betrachtung der entsprechenden Proben ergibt, darauf zurückzuführen, daß bei diesen Proben beim Pressen stellenweise eine innere Spaltung der Stäbchen auftrat, die natürlich eine Erniedrigung der Remanenz zur Folge haben mußte. Die Remanenz vollwertiger Proben liegt sicher bei

<sup>5)</sup> F. Lihl, Metall (im Druck).

4000 Gauß, wahrscheinlich sogar darüber. Unter Annahme dieses Wertes erfährt natürlich auch der Energiewert eine Erhöhung. Nach dem Verlauf der Entmagnetisierungskurve ergeben sich dann die in Tab. 3 eingeklammerten Zahlen, die auch den Kurven der Abb. 8 zugrunde gelegt sind.

Tabelle 3.

Probe Nr.	% Co im Pulver	Reduktionstemperatur	Reduktionszeit Minuten	$JH_c$ Örsted	$BH_c$ Örsted	$BR$ Gauß	$G$ erg/cm <sup>3</sup>
1	5,5	300	60	673	595	2550	20.300
2	5,5	300	130	585	548	4000	29.300
3	5,5	300	350	340	320	3750 (4000)	15.200 (17.000)
4	19,7	300	60	710	622	2650	21.600
5	19,7	300	100	703	650	3700	32.100
6	19,7	300	240	668	613	3750 (4000)	30.400 (32.500)
7	19,7	325	120	645	605	4360	37.200
8	19,7	325	180	588	552	4400	33.800
9	26,9	300	60	760	675	2700	22.400
10	26,9	300	110	733	678	3960	36.700
11	26,9	300	150	727	676	4060	36.000
12	26,9	300	240	723	657	3750 (4000)	32.100 (34.500)
13	26,9	350	60	600	560	4350	33.300
14	26,9	350	80	535	512	4430	34.300

Die Abhängigkeit der Koerzitivkraft  $JH_c$  von der Reduktionszeit bei verschiedenen Kobaltgehalten ist aus Abb. 7 zu ersehen, während in Abb. 8 die gleiche Abhängigkeit für den Energiewert graphisch dargestellt ist. In diese beiden Diagramme sind vergleichshalber auch die entsprechenden, bereits in Abb. 4 wiedergegebenen Kurven mit aufgenommen. Abb. 9 zeigt ferner einige Entmagnetisierungskurven (Legierungspulver mit 5,5% Co, erhalten durch Reduktion von Eisen-Kobalt-formiat bei 300° C).

Wie aus Abb. 7 zu erkennen ist, erfährt die Koerzitivkraft durch Kobaltzusatz eine beträchtliche Steigerung. Außerdem verschiebt sich das Maximum der Kurven stark nach links und liegt bereits beim Legierungspulver mit 5,5% Co außerhalb des

untersuchten Bereiches. Bei noch höheren Kobaltgehalten im Pulver verflachen die Kurven immer mehr, so daß bei 26,9% Co (Kurve IV) die Änderung der Koerzitivkraft mit der Reduktionszeit nicht mehr erheblich ist.

Die Energiewertkurven der Abb. 8 zeigen zum Unterschied von den Kurven für die Koerzitivkraft ausnahmslos ein ausgeprägtes Maximum im untersuchten Bereich, da die Remanenz

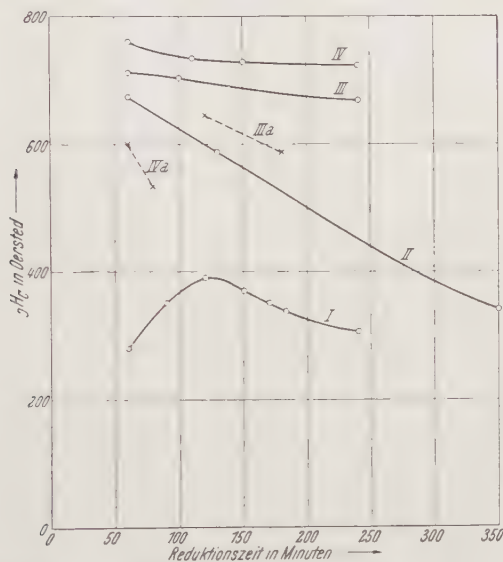


Abb. 7. Koerzitivkraft von Pulverpreßlingen in Abhängigkeit von Reduktionszeit und Reduktionstemperatur für verschiedene Kobaltgehalte.

- Kurve I: Eisenformiat, reduziert bei 300° C,  
 Kurve II: Eisen-Kobalt-formiat mit 5,5% Co, reduziert bei 300° C,  
 Kurve III: Eisen-Kobalt-formiat mit 19,7% Co, reduziert bei 300° C,  
 Kurve IIIa: Eisen-Kobalt-formiat mit 19,7% Co, reduziert bei 325° C,  
 Kurve IV: Eisen-Kobalt-formiat mit 26,9% Co, reduziert bei 300° C,  
 Kurve IVa: Eisen-Kobalt-formiat mit 26,9% Co, reduziert bei 350° C.

bei niedrigen Reduktionsgraden verhältnismäßig tief liegt. Ferner erkennt man aus den Kurven der Abb. 8 eine starke Zunahme des Energiewertes mit der Höhe des Kobaltgehaltes.

Mit Steigerung der Reduktionstemperatur muß gemäß den Kurven der Abb. 3 und 4 die Koerzitivkraft eine Erniedrigung erfahren. Dies zeigen tatsächlich die gestrichelten Kurventeile IIIa und IVa der Abb. 7. Trotzdem verlaufen die entsprechenden Energiewertkurven der Abb. 8 über den Kurven III und IV. Dies deshalb, weil mit Erhöhung der Reduktionstemperatur die Remanenz stark ansteigt, so daß trotz Erniedrigung der Koerzitivkraft eine Erhöhung des Energiewertes resultiert.

Die Ergebnisse der magnetischen Messungen an Eisen-Kobalt-Pulverpreßlingen lehren somit, daß durch Kobaltzusatz sowohl Koerzitivkraft wie Energiewert erhöht werden. Das Maximum der erreichbaren Steigerung ist bei rund 27% Co im Pulver noch nicht erreicht, wie aus Abb. 10 hervorgeht, in der das Maximum des Energiewertes gemäß den Kurven der Abb. 8 in Abhängigkeit vom Kobaltgehalt des Pulvers dargestellt ist.

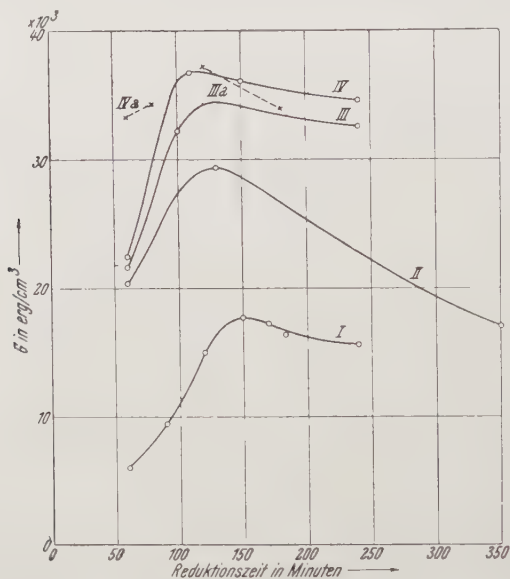


Abb. 8. Energiewert von Pulverpreßlingen in Abhängigkeit von Reduktionszeit und Reduktionstemperatur für verschiedene Kobaltgehalte.

- Kurve I: Eisenformiat, reduziert bei 300° C,  
 Kurve II: Eisen-Kobalt-formiat mit 5,5% Co, reduziert bei 300° C,  
 Kurve III: Eisen-Kobalt-formiat mit 19,7% Co, reduziert bei 300° C,  
 Kurve IIIa: Eisen-Kobalt-formiat mit 19,7% Co, reduziert bei 325° C,  
 Kurve IV: Eisen-Kobalt-formiat mit 26,9% Co, reduziert bei 300° C,  
 Kurve IVa: Eisen-Kobalt-formiat mit 26,9% Co, reduziert bei 350° C.

Wie bei den Untersuchungen des Abschnittes I wird der Höchstwert der Koerzitivkraft und des Energiewertes nicht bei rein metallischen Legierungspulvern erreicht, sondern dann, wenn noch eine beträchtliche Oxydmenge im Pulver vorhanden ist. Das Maximum des Energiewertes liegt ferner stets bei einem höheren Reduktionsgrad als das Maximum der Koerzitivkraft.

### III. Kristallgröße der Feinstpulver.

Die durch Reduktion von Eisenformiat und ebenso die durch Reduktion von Eisen-Kobalt-formiat-Mischkristallen erhaltenen



Pulver sind sehr feinkörnig. Die geringe Kristallgröße der Pulver ist bereits aus den *Debye-Scherrer*-Diagrammen erkennbar in

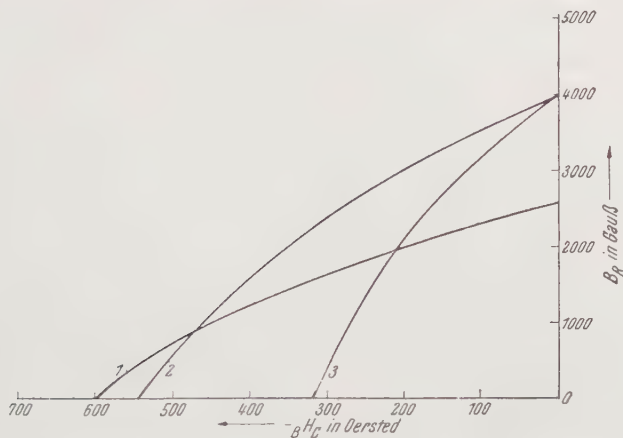


Abb. 9. Entmagnetisierungskurven, aufgenommen an Eisen-Kobalt-Pulverpreßlingen mit 5,5% Co. (Die bei den Kurven vermerkten Zahlen beziehen sich auf die Probenbezeichnungen gemäß Tabelle 3.)

einer deutlichen Verbreiterung der Interferenzlinien. Noch deutlicher kommt dieser Umstand natürlich bei Rückstrahlaufnahmen zur Geltung, wie aus Abb. 11 zu ersehen ist. In dieser Abbildung sind Ausschnitte aus Kegel-Rückstrahldiagrammen von reduzierten Eisenpulvern, aufgenommen mit Co-K-Strahlung, wiedergegeben, wobei der Reduktionsgrad und die Werte für die Koerzitivkraft der aus diesen Pulvern hergestellten Preßlinge im Abbildungstext vermerkt sind. Die Diagramme 1—5 stammen von Pulvern, erhalten durch Reduktion von Eisenformiat bei 350° C (s. Tab. 1 und Abb. 2), während das Diagramm 6 einem durch zwei-

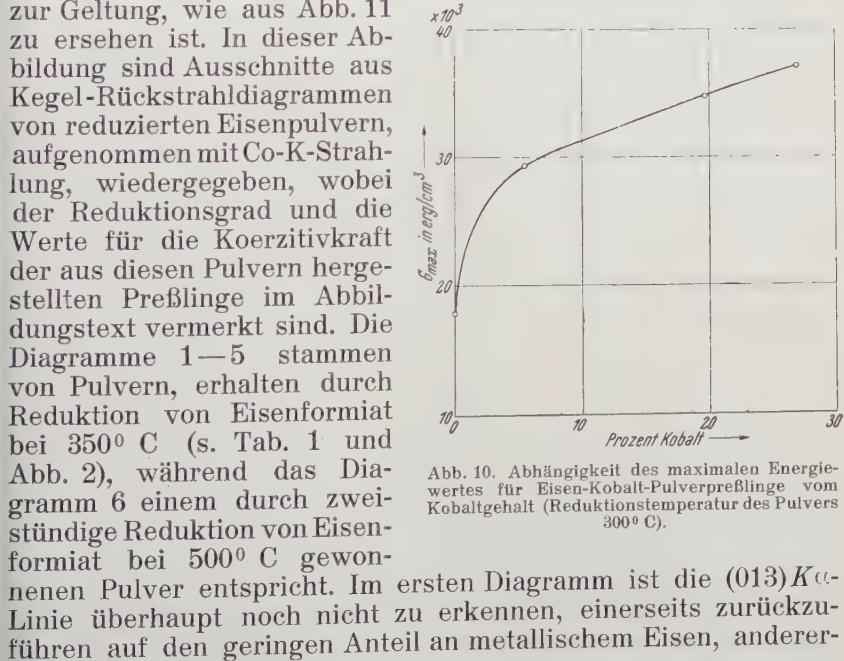


Abb. 10. Abhängigkeit des maximalen Energiewertes für Eisen-Kobalt-Pulverpreßlinge vom Kobaltgehalt (Reduktionstemperatur des Pulvers 300° C).

stündige Reduktion von Eisenformiat bei 500° C gewonnenen Pulver entspricht. Im ersten Diagramm ist die (013)*K*<sub>cl</sub>-Linie überhaupt noch nicht zu erkennen, einerseits zurückzuführen auf den geringen Anteil an metallischem Eisen, anderer-

seits aber auch bedingt durch die große Feinkörnigkeit der Probe. Die nächsten drei Diagramme zeigen nur ziemlich breite Bänder ohne jede Dublettaufspaltung, während in Diagramm 5 bereits Anzeichen einer solchen Aufspaltung zu erkennen sind und in Diagramm 6 die Dublettaufspaltung vollständig ist.

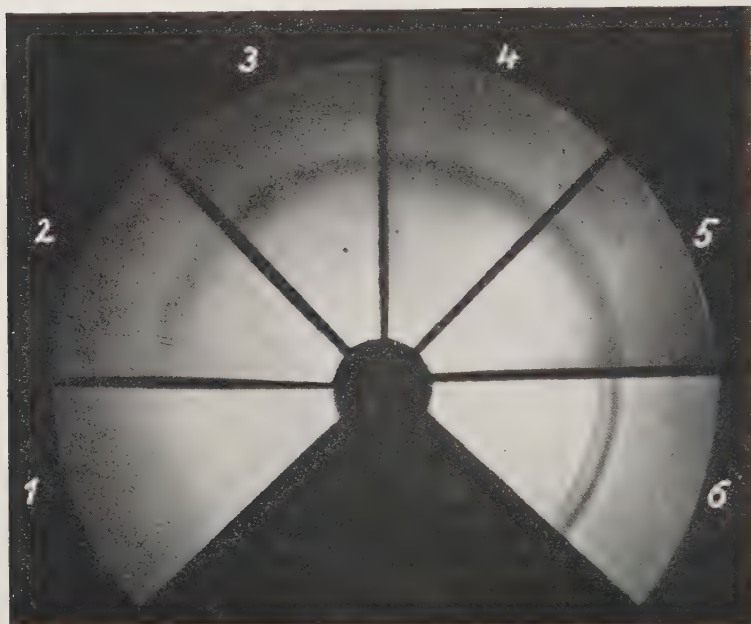


Abb. 11. Ausschnitte aus Kegel-Rückstrahlungen von Feinstpulvern mit verschiedenem Oxydgehalt, erhalten durch Reduktion von Eisenformiat. Die aus diesen Pulvern hergestellten Preßlinge ergaben folgende Werte für die Koerzitivkraft:

Probe- bezeichnung	Reduktions- grad	$JH_c$ in Örsted
1	14,2 0/0	251
2	60,5 0/0	354
3	89,0 0/0	267
4	89,2 0/0	215
5	91,6 0/0	160
6	100 0/0	10

Die Gegenüberstellung dieser Diagramme und der Zahlenwerte für die Koerzitivkraft der Pulverpreßlinge zeigt nun ganz augenfällig, daß die Koerzitivkraft mit zunehmender Kristallgröße stark absinkt. Unter der berechtigten Annahme, daß die niedrigere Koerzitivkraft des kurzzeitig reduzierten Pulvers auf den geringen Gehalt des Pulvers an metallischem Eisen zurück-

zuführen ist — bei diesem Pulver überwiegt ja mengenmäßig das Oxyd —, folgt somit, daß die hohe Koerzitivkraft der Pulverpreßlinge auf einen Kristallgrößeneffekt zurückzuführen ist. Nach Messungen von *Bertaut*<sup>6)</sup> liegt die Kristallgröße der Pulver, bei denen hohe Werte für die Koerzitivkraft erhalten werden, zwischen 200 und 300 Å, so daß ein solcher Eisenkristall eine Kantenlänge von ungefähr 100 Gitterkonstanten besitzt.

#### IV. Néelsche Theorie der Koerzitivkraft ferromagnetischer Feinstpulver.

Im Gebiet kleiner Felder erfolgt die Magnetisierung kompakter Ferromagnetika bekanntlich durch Verschiebung der Wände zwischen den *Weißschen* Bezirken. Für die Wanddicke, die Übergangszone zwischen der Orientierung der Spins zweier Nachbarbereiche, ergibt eine theoretische Abschätzung den Wert von ungefähr 100 Gitterkonstanten, somit gerade den Wert für die Kristallgröße der Feinstpulver. Wenn nun die Kristallabmessungen in der Größenordnung der Wanddicke liegen, dann stellt jeder Kristall für sich einen *Weißschen* Bezirk dar, so daß in diesem Fall der üblich angenommene Mechanismus der Magnetisierung durch Wandverschiebungen nicht maßgebend sein kann. Ein Wechsel der Magnetisierung in den einzelnen Bereichen ist dann nur durch Drehung des Vektors der spontanen Magnetisierung in die Feldrichtung möglich. Derartige Pulver können daher auch keinen *Barckhausen*-Effekt zeigen, da die *Barckhausen*-Sprünge auf Wandverschiebungen zurückzuführen sind<sup>7)</sup>.

Als Ursache für die Richtungsabhängigkeit der spontanen Magnetisierung kommen zwei Faktoren in Betracht:

1. *Die Kristallanisotropie*: Um den Vektor der Magnetisierung eines kubischen Stoffes aus der magnetischen Vorzugsrichtung in eine beliebige Richtung mit den Richtungskosinussen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  zu drehen, muß eine Arbeit vom Betrag

$$E_K = K(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2) \quad (1)$$

aufgewendet werden, die Kristallenergie.  $K$ , die Konstante der Kristallenergie, besitzt für Eisen einen Wert von 4 bis  $4,5 \cdot 10^5$  erg/cm<sup>3</sup>.

2. *Die Gestaltanisotropie*: Diese ergibt sich daraus, daß die Richtung der spontanen Magnetisierung in einem anisotrop geformten Korn in der größten Längserstreckung des Korns liegt. Auch in diesem Fall ist zur Drehung des Vektors der Magneti-

<sup>6)</sup> Zitiert in: *L. Néel*, C. r. **224**, 1488—1490 (1947).

<sup>7)</sup> Dies konnte tatsächlich durch Versuche mit solchen Pulvern am Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Wien bestätigt werden.

sierung eine bestimmte Arbeit erforderlich, deren Größe von der Form des Korns abhängt.

Vernachlässigt man zunächst den zweiten Einfluß, setzt man also kugelige Körner voraus, dann bleibt als Ursache für die Richtungsabhängigkeit der Magnetisierung nur die Kristallenergie übrig. Man kann dann elementar ableiten, daß der Magnetisierungsvektor eines Bezirks, der ursprünglich  $90^\circ$  gegen die Feldrichtung lag, mit Erhöhung der Feldstärke sich zunächst langsam stetig dreht, bis das Maximum der Energiekurve, die sich durch Superposition der Feldenergie über die Kristallenergie ergibt, verschwindet. In diesem Augenblick klappt der ganze Bereich in die Feldrichtung um. Nach Verschwinden des äußeren Feldes bleibt das Energieminimum in seiner neuen Lage, die Drehung ist irreversibel geworden. Um den Vektor dieses Bezirks wieder in seine ursprüngliche Richtung zu drehen, ist eine entgegengesetzte Feldstärke vom Betrag  $\frac{2K}{J_s}$  nötig, wobei  $J_s$  die Sättigungsmagnetisierung bedeutet. Dieser Wert ist nun nichts anderes als der Betrag der Koerzitivkraft. Man erhält somit:

$$H_c = \frac{2K}{J_s}. \quad (2)$$

Da in einem pulverförmigen Haufwerk die einzelnen Körner verschiedene Orientierung besitzen, muß über alle möglichen Lagen gemittelt werden. Die von *L. Néel*<sup>8)</sup> auf graphischem Weg durchgeführte Mittelwertbildung führte zu dem Ergebnis, daß die mittlere Koerzitivkraft eines Pulvers regelloser Orientierung gleich sein muß

$$\bar{H}_c = 0,64 \frac{K}{J_s}. \quad (2a)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung, die für kubisch kristallisierende Stoffe gilt, findet man für Eisen mit  $J_s = 1700$  eine mittlere Koerzitivkraft von 160 Örsted.

Betrachtet man nun den zweiten Grenzfall, daß die Gestaltanisotropie als alleinige Ursache für die Richtungsabhängigkeit der Magnetisierung zu betrachten ist, und nimmt man ferner der Einfachheit halber an, daß die Körner die Form von Rotationsellipsoiden besitzen, dann ist in Gleichung (2)  $K$  durch den von der Gestalt abhängigen Anteil der Magnetisierungsarbeit  $\frac{1}{2} \Delta N J_s^2$  zu ersetzen, worin  $\Delta N$  die Differenz der Entmagnetisierungsfaktoren in den beiden Hauptachsen des Ellipsoids bedeutet. In diesem Fall folgt somit für die Koerzitivkraft der Ausdruck:

$$H_c = \Delta N J_s. \quad (3)$$

<sup>8)</sup> *L. Néel*, C. r. 224, 1488—1490 (1947).<sup>1)</sup>



Nun liegen erstens die Ellipsoide in einem pulverförmigen Haufwerk in verschiedenen Richtungen des Raumes und zweitens sind auch die Achsen der Ellipsoide verschieden, so daß  $\Delta N$  schwankt. Als Grenzen für die Form der Ellipsoide können einerseits die Kugel ( $\Delta N = 0$ ) und andererseits der Zylinder ( $\Delta N = 2\pi$ ) angesetzt werden. Man muß also sowohl über die verschiedenen Lagen der Ellipsoide wie über die Achsenverhältnisse das Mittel bilden. Nach *L. Néel*<sup>9)</sup> findet man dann eine mittlere Koerzitivkraft

$$H_c = 0,26 \pi J_s. \quad (3a)$$

Diese Formel ergibt für Eisen den erstaunlich hohen Wert von 1400 Örsted. Demnach müßte möglich sein, aus feinsten Eisenpulvern mit einer Kristallgröße von ungefähr 100 Gitterkonstanten Permanentmagnete einer Koerzitivkraft von 1400 Örsted herzustellen.

Die gemessenen Werte für die Koerzitivkraft von Pulverpreßlingen liegen jedoch stets weitaus tiefer. Der Grund dafür liegt darin, daß zwischen den einzelnen Pulverkörnern bereits im lockeren Pulver und mehr noch im Preßling Wechselwirkungen bestehen, die in obigen Gleichungen außer acht gelassen sind. In dem Ausdruck für die Koerzitivkraft fehlt daher noch ein Faktor  $\kappa$ , der dieser Wechselwirkung Rechnung trägt. Nach *L. Néel*<sup>9)</sup> erfolgt mit einer Zunahme der Dichte eine Verminderung der Koerzitivkraft im Verhältnis

$$\kappa = 1 - \frac{d}{d_0}. \quad (4)$$

In dieser Formel bedeutet  $d_0$  die Dichte des massiven Metalls und  $d$  die Dichte des Preßlings, wobei oxydische, bzw. Bindemittelanteile in Abzug zu bringen sind. Unter Einführung des Faktors  $\kappa$  lautet somit die Gleichung für die mittlere Koerzitivkraft eines Pulvers

$$H_c = 0,26 \pi \left(1 - \frac{d}{d_0}\right) J_s. \quad (5)$$

Der Maximalwert für  $H_c$  gemäß Gl. (3a) wird also nur für  $d = 0$ , nur in dem nie zu realisierenden Fall idealer Verdünnung erreicht. Mit Erhöhung der Dichte des Pulvers wird die Koerzitivkraft proportional  $\kappa$  vermindert. Diese lineare Abhängigkeit der Koerzitivkraft von  $\kappa$  wird durch das Experiment in vollem Umfang bestätigt, wie die nachfolgend besprochenen Versuche beweisen.

Durch Reduktion von Eisenformiat bei 300° C wurde ein Feinstpulver mit hohem Gehalt an metallischem Eisen (93%)

<sup>9)</sup> *L. Néel*, C. r. 224, 1550—1551 (1947).

hergestellt, dieses Pulver mit verschieden hohem Druck zu Stäbchen verpreßt und Koerzitivkraft, Remanenz sowie Energie-wert bestimmt. Die Zusammenstellung der bei diesen Versuchen erhaltenen Ergebnisse ist gemäß den Entmagnetisierungskurven der Abb. 12 aus Tab. 4 zu ersehen.

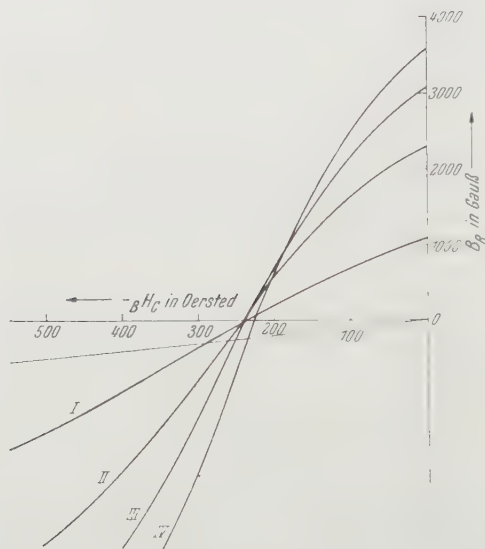


Abb. 12. Entmagnetisierungskurven, aufgenommen an Eisenpulverpreßlingen in Abhängigkeit vom Preßdruck.

Kurve I: Preßdruck 1 t/cm<sup>2</sup>,

Kurve II: Preßdruck 3 t/cm<sup>2</sup>,

Kurve III: Preßdruck 5 t/cm<sup>2</sup>,

Kurve IV: Preßdruck 8 t/cm<sup>2</sup>.

Tabelle 4.

Preßdruck t/cm <sup>2</sup>	Dichte $d^*)$ g/cm <sup>3</sup>	$\kappa$	$JH_c$ Örsted	$BH_c$ Örsted	$B_R$ Gauß	$G$ erg/cm <sup>3</sup>
1	2,5	0,69	295	235	1070	2.630
3	3,2	0,60	262	245	2300	6.800
5	3,5	0,56	250	240	3100	9.400
8	3,7	0,53	235	225	3600	10.600

\*) Ohne Restoxyd und Bindemittel.

Die Abhängigkeit der magnetischen Kennziffern vom Preßdruck geht aus Abb. 13 hervor. Man erkennt daraus, daß die Koerzitivkraft mit Erhöhung des Preßdruckes abnimmt, jedoch

die Remanenz stark ansteigt, so daß auch der Energiewert mit dem Preßdruck eine Steigerung erfährt.

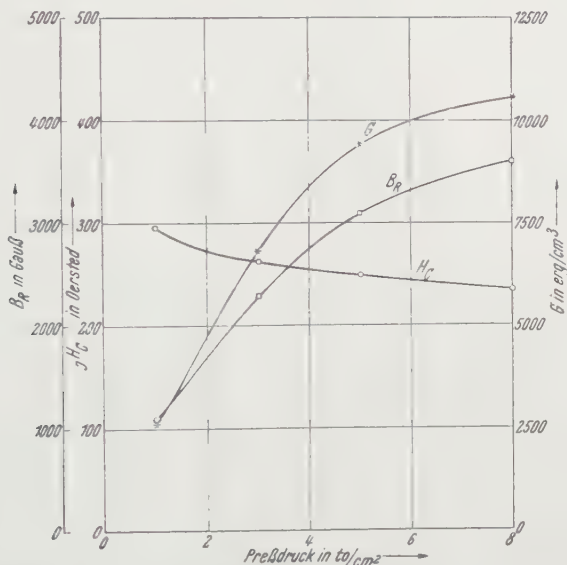


Abb. 13. Abhängigkeit der Koerzitivkraft  $JH_c$ , der Remanenz  $B_R$  und des Energiewertes  $G$  vom Preßdruck für Eisenpulverpreßlinge.

In Abb. 14 ist ferner die Abhängigkeit der Koerzitivkraft  $JH_c$  vom Faktor  $\kappa$  gemäß Gl. (4) graphisch dargestellt. Das Gesetz der linearen Abhängigkeit der Koerzitivkraft von  $\left(1 - \frac{d}{d_0}\right)$  ist ausgezeichnet bestätigt. Die Gerade geht für  $d = d_0$ , also für den kompakten Stoff, durch den Koordinatenursprung. Für  $d = 0$  allerdings wird der theoretische Wert von 1400 Örsted gemäß Gl. (3a) keineswegs erreicht. Die Verlängerung der Geraden ergibt in diesem Fall einen Maximalwert von  $H_c \text{ max} = 450$  Örsted, einen Wert also, der weit unter dem theoretischen Optimum liegt. Die Ursache für diese Abweichung ist in der Pulverherstellung zu suchen. Bei der weitgehenden Reduktion des vorliegenden Pulvers und der langdauernden Reduktion von sieben Stunden

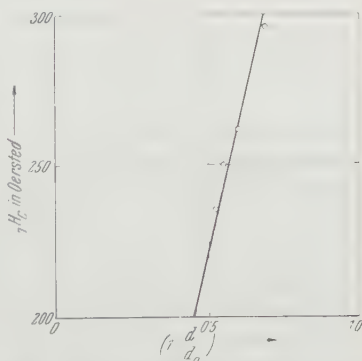


Abb. 14. Abhängigkeit der Koerzitivkraft  $JH_c$  von  $\left(1 - \frac{d}{d_0}\right)$ , ermittelt an Eisenpulverpreßlingen, hergestellt mit verschiedenem Preßdruck.

treten unvermeidbare Zusammenballungen von Kristallen ein, deren innere Dichte größer ist als die in Rechnung gesetzte Dichte der Preßlinge  $d$  nach Abzug der Oxyde und Bindemittelanteile. Daß diese Folgerung richtig ist, ergibt sich auch daraus, daß bei nicht so weitgehender Reduktion des Pulvers der Grenzwert von  $H_c$  für unendliche Verdünnung höher liegt. So ergibt sich beispielsweise aus den Versuchsreihen der Zahlentafeln 1 und 2 für eine Reduktionstemperatur von  $350^\circ$ :  $\lim_{d \rightarrow 0} H_c = 520$  Örsted und für eine Reduktionstemperatur von  $300^\circ$ :  $\lim_{d \rightarrow 0} H_c = 600$  Örsted. Letzterer Wert liegt in der Größen-

ordnung des auch von *L. Weil*<sup>10)</sup> gefundenen Grenzwertes von 670 Örsted. Auch der unter Zugrundelegung der metallischen Dichte der Eisen-Kobalt-Pulverpreßlinge des Abschnittes II zu ermittelnde Grenzwert von 1000 bis 1250 Örsted stimmt gut mit den von *L. Weil* gefundenen Zahlen überein.

Daß man dem theoretischen Grenzwert ziemlich nahe kommen kann, zeigen Ergebnisse, die *L. Weil* an besonders sorgfältig hergestellten Pulvern erhielt. Als Grenzwert für unendliche Verdünnung ergab sich für Eisenpulver eine Koerzitivkraft von 1230 Örsted, bzw. bei einer 30prozentigen Eisen-Kobalt-Legierung ein Wert von 1360 Örsted. Die Unterschiede gegenüber den theoretischen Werten betragen nur 15%.

Der Grenzwert  $\lim_{d \rightarrow 0} H_c$  ist somit stark von der Art der Pulverherstellung abhängig.

Bei den in den Abschnitten I und II besprochenen Versuchen wurde gefunden, daß der Maximalwert der Koerzitivkraft nicht dann auftritt, wenn das Pulver vollständig reduziert ist, sondern dann, wenn noch eine erhebliche Oxydmenge im Pulver vorhanden ist. Dieses Ergebnis ist nach dem vorhin Gesagten verständlich, da ja die nicht reduzierten Oxydteilchen die Wechselwirkung der Eisenteilchen hindern, damit eine größere Verdünnung des Pulvers bewirken, d. h. eine Verringerung von  $d$ . Mit Erhöhung des Reduktionsgrades wird die Dichte  $d$  erhöht, es sinkt die Koerzitivkraft. Da aber gleichzeitig die Remanenz größer wird, ergibt sich bis zu einer gewissen Grenze eine Steigerung des Energiewertes. Das Maximum des Energiewertes muß daher bei einem höheren Reduktionsgrad liegen als das Maximum der Koerzitivkraft, ganz in Einklang mit den Kurven der Abb. 2, 4, 7 und 8. Bei weiter fortschreitender Reduktion des Pulvers erfolgt ein derart starker Abfall der Koerzitivkraft, daß trotz Erhöhung der Remanenz auch der Energiewert sinkt, u. zw. um so mehr, je vollständiger die Reduktion durchgeführt ist. Für die Dauermagneteigenschaften

<sup>10)</sup> *L. Weil*, C. r. 225, 229—230 (1947).



der Pulvermagnete dürften daher gewisse Anteile an Restoxyd eine wesentliche Rolle spielen.

Abschließend ist also zu sagen, daß die *Néelsche* Theorie der Koerzitivkraft ferromagnetischer Feinstpulver die Versuchsergebnisse in jeder Beziehung befriedigend wiederzugeben imstande ist.

### Zusammenfassung.

An Preßlingen aus Feinstpulvern, hergestellt durch Reduktion von Eisen(II)-formiat bei Temperaturen um  $300^{\circ}\text{C}$ , wird die Abhängigkeit der Koerzitivkraft, der Remanenz und des Energiewertes von Reduktionszeit und Reduktionstemperatur des Pulvers untersucht. Dabei wird gefunden, daß der Höchstwert von Koerzitivkraft und Energiewert nicht dann erreicht wird, wenn die Reduktion vollständig abgelaufen ist, sondern dann, wenn im Pulver außerdem noch eine beträchtliche Menge an Oxyd vorhanden ist, das bei der thermischen Zersetzung des Formiats entsteht. Das Maximum des Energiewertes tritt stets bei einem höheren Reduktionsgrad auf als das Maximum der Koerzitivkraft.

In gleicher Weise wird die Änderung der Koerzitivkraft und des Energiewertes durch Legieren mit Kobalt geprüft. Die entsprechenden Legierungsfeinstpulver werden durch Reduktion von Eisen-Kobalt-formiat-Mischkristallen gewonnen. Koerzitivkraft und Energiewert nehmen mit der Höhe des Kobaltzusatzes stark zu, wobei auch in diesem Fall die Optimalwerte dieser Größen nicht bei vollständiger Reduktion, sondern bei bedeutendem Oxydgehalt im Pulver auftreten. Hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Kurvenmaxima gilt das gleiche wie bei Pulvern ohne Kobaltzusatz.

Die experimentellen Ergebnisse stehen in Einklang mit der in dieser Abhandlung kurz skizzierten *Néelschen* Theorie der Koerzitivkraft ferromagnetischer Feinstpulver. Auch das Gesetz der linearen Abhängigkeit der Koerzitivkraft von der Raumerfüllung wird bestätigt und dabei gezeigt, daß trotz Abnahme der Koerzitivkraft mit Erhöhung des Preßdruckes eine Steigerung des Energiewertes eintreten kann, da die Remanenz mit Erhöhung der Dichte stark ansteigt.

# Die Theorien der Teilchen mit höherem Spin.

Von

**P. Urban und F. Schwarzl<sup>\*)</sup>.**

Institut für Theoretische Physik der Universität Graz.

(Eingelangt am 15. Jänner 1950.)

## Einleitung.

Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck, dem Leserkreis der *Acta Physica Austriaca* einen zusammenfassenden Bericht über die Theorien von Partikeln mit höherem Spin zu geben, welcher einerseits die große Literatur dieses Problemkreises in eine Beziehung bringt und anderseits nur das Wesentliche herausarbeitet. Gelegentliche neue Formulierungen und Folgerungen ließen sich nicht umgehen und sollen dazu dienen, das Verständnis des Lesers zu fördern und zu erleichtern. Zuerst wird in einer Einleitung die Spinoranalysis formuliert und alles für das später Notwendige zusammengestellt. Im zweiten Abschnitt werden die infinitesimalen Transformationen in großer Allgemeinheit behandelt. Der dritte befaßt sich mit den Wellengleichungen mit Zusatzbedingungen in der Form, wie sie zum ersten Male von *Dirac* und *Fierz* aufgestellt wurden. Dann folgt im vierten Abschnitt die Theorie von *Bhabha*, welcher zum ersten Male Wellengleichungen ohne Zusatzbedingungen behandelt hat. Der fünfte und letzte Abschnitt ist den speziellen Typen der Wellengleichungen gewidmet, wie sie besonders aus der Theorie von *Bhabha* resultieren. Die Arbeiten erstrecken sich über einen Zeitraum bis 1945, und wir beabsichtigen, in einem zweiten Teil auch die Arbeiten bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt weiterzuführen. Zur Behandlung des Problems muß erwähnt werden, daß ausgiebig Gruppentheorie herangezogen wurde, allerdings in einem Umfange, der dem heutigen Physiker durchaus geläufig ist, speziell wenn er sich mit theoretischen Problemen befaßt. Wir möchten nicht verabsäumen, an dieser Stelle auf die tiefen Darstellungen von *H. Weyl*, *Murnaghan* und *Van der Waerden* besonders hinzuweisen, welche geeignet sind, die inneren Zusammenhänge der modernen Physik von einem höheren Standpunkt zu überblicken.

## Spinoranalyse.

Wir beginnen mit der Aufstellung eines streng kovarianten Spinorkalküls nach *Bhabha*<sup>1)</sup>, indem wir die folgenden metrischen Spinoren und Tensoren zugrunde legen:

---

<sup>\*)</sup> Derzeitige Adresse: Delft, Kunststoffeninstituut, Holland.

<sup>1)</sup> *Bhabha*, Rev. Mod. Phys. 17, 200 (1945).

$$g^{kl} = g_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} &= 1 & \varepsilon^{12} &= -\varepsilon^{21} = 1 & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \\ \varepsilon_{\dot{2}\dot{1}} &= -1 & \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} &= -\varepsilon^{\dot{2}\dot{1}} = -1 & \varepsilon_{\dot{1}\dot{1}} &= \varepsilon_{\dot{2}\dot{2}} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{1}} = \varepsilon^{\dot{2}\dot{2}} = 0 \end{aligned}$$

Tensorindizes (mit kleinen lateinischen Buchstaben) und Spinorindizes (mit kleinen griechischen Buchstaben) werden folgendermaßen herauf- und heruntergezogen:

$$\begin{aligned} A^k &= A_l g^{lk} & a^\mu &= a_\nu \varepsilon^{\nu\mu} & \dot{a}^\mu &= \varepsilon^{\mu\dot{\nu}} \dot{a}_{\dot{\nu}} \\ A_k &= g_{kl} A^l & a_\mu &= \varepsilon_{\mu\nu} a^\nu & \dot{a}_{\dot{\mu}} &= \dot{a}^{\dot{\nu}} \varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\mu}} \\ g_{kl} g^{lm} &= \delta_k^m & \varepsilon_{\lambda\mu} \varepsilon^{\mu\nu} &= \delta_\lambda^\nu & \varepsilon^{\mu\dot{\nu}} \varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\lambda}} &= \delta^\mu_{\dot{\lambda}} \end{aligned} \quad (2)$$

(Man beachte, daß Summationen über unpunktierte Spinorindizes von links unten nach rechts oben, über punktierte von links oben nach rechts unten geführt werden.) Aus (1) und (2) folgen beispielsweise:

$$\varepsilon^{00} = A_0, \quad A^k = -A_k \quad (k=1, 2, 3) \quad a^1 = -a_2 \quad a^2 = a_1 \quad a^{\dot{1}} = -a_{\dot{2}} \quad a^{\dot{2}} = a_{\dot{1}}$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \delta_{11} &= \delta_{22} = -1 & \delta_{\mu\nu} &= -\delta^{\nu\mu} \\ \delta_{\dot{1}\dot{1}} &= \delta_{\dot{2}\dot{2}} = +1 & \delta_{\mu\dot{\nu}} &= -\delta^{\dot{\nu}\mu} \end{aligned}$$

Diese Metrik unterscheidet sich von der von Uhlenbeck-Laporte<sup>2)</sup> eingeführten; sie ist so gewählt, daß alle Größen mit griechischen Indizes richtige Spinoren sind, wodurch die Kovarianz aller Gleichungen auch in bezug auf Spinorindizes gesichert erscheint.

Wir legen dem Spinorkalkül eine Größe  $\sigma$  zugrunde, die zugleich Tensor und gemischter Spinor ist. (Damit ist gemeint, daß  $\sigma_k$  sich bei festem  $\lambda, \mu$  wie ein Tensor,  $\sigma^{\lambda\mu}$  bei festem  $k$  sich wie ein Spinor transformiert.)

$$\sigma_k = \sigma_k^{\lambda\mu} = \begin{bmatrix} \sigma_k^{11} & \sigma_k^{1\dot{2}} \\ \sigma_k^{21} & \sigma_k^{2\dot{2}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aus der Gestalt von (3) ersieht man

$$\sigma_k^{\mu\dot{\nu}} = \sigma^{\dot{\nu}\mu}_k \quad (4)$$

weshalb man die obigen Matrizen auch als

<sup>2)</sup> Uhlenbeck-Laporte, Physic. Rev. **37**, 1380 (1931).

$$\sigma^k_{\mu \nu} = \begin{bmatrix} \sigma^k_{11} & \sigma^k_{12} \\ \sigma^k_{21} & \sigma^k_{22} \end{bmatrix}$$

definieren kann.

Die Relation  $\sigma_k \sigma_l + \sigma_l \sigma_k = 2 \delta_{kl}$  läßt sich nun schreiben

$$\begin{aligned} \sigma_k^{\mu \rho} \sigma_l^{\dot{\rho} \dot{\nu}} + \sigma_l^{\mu \rho} \sigma_k^{\dot{\rho} \dot{\nu}} &= 2 g_{kl} \delta^{\mu \nu} \\ \sigma_k^{\dot{\rho} \dot{\mu}} \sigma_l^{\mu \dot{\nu}} + \sigma_l^{\dot{\rho} \dot{\mu}} \sigma_k^{\mu \dot{\nu}} &= 2 g_{kl} \delta^{\dot{\rho} \dot{\nu}}; \end{aligned} \quad (5)$$

ferner schreiben sich die Gleichungen  $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$   $\sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1$

$$\begin{aligned} \sigma_k^{\mu \dot{\nu}} \sigma_l^{\dot{\rho} \nu} &= \frac{i}{2} \varepsilon_{klmn} \sigma^m{}^{\mu \dot{\nu}} \sigma^n{}_{\dot{\rho} \nu} \\ \sigma_k^{\dot{\rho} \dot{\mu}} \sigma_l^{\mu \dot{\nu}} &= -\frac{i}{2} \varepsilon_{klmn} \sigma^m{}_{\dot{\rho} \dot{\mu}} \sigma^n{}^{\mu \dot{\nu}}; \end{aligned} \quad (6)$$

dabei ist  $\varepsilon$  ein in allen Indizes antisymmetrischer Tensor:

$\varepsilon_{klmn} = +1$ , wenn  $(klmn)$  gerade Permutation von  $(1230)$  ist,  
 $= -1$ , wenn  $(klmn)$  ungerade Permutation von  $(1230)$  ist,  
 $= 0$ , wenn zwei Indizes gleich sind.

Aus  $\frac{1}{2} [\sigma_k \sigma_l - \sigma_l \sigma_k] = \sigma_k \sigma_l$  folgt noch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\sigma_k^{\mu \dot{\nu}} \sigma_l^{\dot{\rho} \nu} - \sigma_l^{\mu \dot{\nu}} \sigma_k^{\dot{\rho} \nu}] &= \sigma_k^{\mu \dot{\nu}} \sigma_l^{\dot{\rho} \nu} \\ \frac{1}{2} [\sigma_k^{\dot{\rho} \dot{\mu}} \sigma_l^{\mu \dot{\nu}} - \sigma_l^{\dot{\rho} \dot{\mu}} \sigma_k^{\mu \dot{\nu}}] &= \sigma_k^{\dot{\rho} \dot{\mu}} \sigma_l^{\mu \dot{\nu}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Schließlich gelten noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma^m{}^{\mu \dot{\nu}} \sigma_n{}_{\dot{\rho} \nu} &= 2 \delta^m_n \\ \sigma_m{}^{\mu \dot{\nu}} \sigma^n{}_{\dot{\rho} \nu} &= 2 \delta^m_n \end{aligned} \quad (8)$$

und

$$\sigma_m{}^{\mu \dot{\lambda}} \sigma^m{}_{\dot{\rho} \dot{\nu}} = -2 \varepsilon^{\mu \rho} \varepsilon^{\dot{\lambda} \dot{\nu}}. \quad (9)$$

Schließlich erwähnen wir noch die bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} a_{\lambda \mu \nu \dots} b^{\lambda \kappa \sigma \dots} &= -a^{\lambda \mu \nu \dots} b_{\lambda \kappa \sigma \dots} \\ a_{\lambda} a^{\lambda} &= 0 \quad a_{\lambda \mu \nu} a^{\lambda \mu \nu} = 0 \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Wir ordnen nun auf kovariante Art jedem Tensor einen Spinor zu durch die Definition:

$$a^{\lambda \dot{\mu}} = A_m \sigma^m{}^{\lambda \dot{\mu}} = A^m \sigma_m{}^{\lambda \dot{\mu}}. \quad (11)$$

Das ist explizite:

$$\begin{aligned} a^1{}^{\dot{1}} &= A^0 + A^3 & a^2{}^{\dot{1}} &= A^1 + iA^2 \\ a^1{}^{\dot{2}} &= A^1 - iA^2 & a^2{}^{\dot{2}} &= A^0 - A^3. \end{aligned}$$



Für die Umkehrzuordnung findet man mit Hilfe von (8) sofort:

$$A_n = \frac{1}{2} \sigma_{n\lambda\dot{\mu}} a^{\lambda\dot{\mu}} = \frac{1}{2} \sigma_{n\lambda\dot{\mu}} a_{\lambda\dot{\mu}} \quad A^n = \frac{1}{2} \sigma^{n\lambda\dot{\mu}} a^{\lambda\dot{\mu}} = \frac{1}{2} \sigma^{n\lambda\dot{\mu}} a_{\lambda\dot{\mu}}, \quad (12)$$

Das Skalarprodukt wird unter Verwendung von Formel (9) zu

$$A_k B^k = \frac{1}{2} a^{\lambda\dot{\mu}} b_{\lambda\dot{\mu}} = \frac{1}{2} a_{\lambda\dot{\mu}} b^{\lambda\dot{\mu}} = -\frac{1}{2} a_{\lambda\dot{\mu}} b^{\lambda\dot{\mu}}, \quad (13)$$

woraus speziell mit der Definition des Gradientenspinors

$$\partial_{\lambda\dot{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \sigma^m_{\lambda\dot{\mu}}$$

die Formeln für Divergenz und Laplace-Operator im Vierdimensionalen die Gestalt erhalten:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = D_k D^k = \frac{1}{2} \partial_{\lambda\dot{\mu}} \partial^{\lambda\dot{\mu}} \quad (14)$$

$$\text{Div } A^m = D_m A^m = \frac{1}{2} \partial_{\lambda\dot{\mu}} a^{\lambda\dot{\mu}}.$$

Für Tensoren höheren Ranges wird die Zuordnung eine analoge:

$$A_{k_1 k_2 \dots k_v} = \left(\frac{1}{2}\right)^v \sigma_{k_1 \lambda_1 \dot{\mu}_1} \sigma_{k_2 \lambda_2 \dot{\mu}_2} \dots \sigma_{k_v \lambda_v \dot{\mu}_v} a_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_v \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_v} \quad (15)$$

$$a^{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_v}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_v} = A^{k_1 k_2 \dots k_v} \sigma^{\dot{\mu}_1}_{k_1 \lambda_1} \sigma^{\dot{\mu}_2}_{k_2 \lambda_2} \dots \sigma^{\dot{\mu}_v}_{k_v \lambda_v}$$

Man sieht, daß auf diese Art jedem gemischten Spinor mit gleich viel punktierten wie unpunkteten Indizes ein Tensor zugeordnet werden kann.

Bei Tensoren mit Symmetrieeigenschaften werden die Zuordnungen komplizierter: einem antisymmetrischen Tensor  $I_{[m n]} = -I_{[n m]}$  kann man zwei Spinoren zuordnen:

$$4 K_{\nu}{}^{\mu} = -I_{[m n]} \sigma^{m\mu\dot{\lambda}} \sigma^n{}_{\dot{\lambda}\nu} \quad (16)$$

$$4 L_{\mu}{}^{\dot{\lambda}} = I_{[m n]} \sigma^m{}_{\mu\nu} \sigma^{n\nu\dot{\lambda}}$$

Das ist explizite:

$$1 = -K_2{}^2 = \frac{1}{2} [i I^{12} + I^{03}] \quad L_1{}^{\dot{1}} = -L_2{}^{\dot{2}} = -\frac{1}{2} [i I^{12} - I^{03}]$$

$$1 = \frac{1}{2} [i I^{23} + I^{01}] - \frac{i}{2} [i I^{31} + I^{02}] \quad L_2{}^{\dot{1}} = -\frac{1}{2} [i I^{23} - I^{01}] - \frac{i}{2} [i I^{31} - I^{02}]$$

$$2 = \frac{1}{2} [i I^{23} + I^{01}] + \frac{i}{2} [i I^{31} + I^{02}] \quad L_1{}^{\dot{2}} = -\frac{1}{2} [i I^{23} - I^{01}] + \frac{i}{2} [i I^{31} - I^{02}]$$

Mit der Abkürzung

$$K_x = \frac{1}{2} [iI^{23} + I^{01}] \quad L_x = \frac{1}{2} [iI^{23} - I^{01}] \quad (17)$$

oder

$$(I^{01}, I^{02}, I^{03}) = \vec{K} - \vec{L} \quad i(I^{23}, I^{31}, I^{12}) = \vec{K} + \vec{L}$$

wird die Zuordnung

$$\begin{aligned} K_1^1 &= -K_2^2 = +K_z & K_2^1 &= K_x - iK_y & K_1^2 &= K_x + iK_y \\ L_1^1 &= -L_2^2 = -L_z & L_2^1 &= -L_x - iL_y & L_1^2 &= -L_x + iL_y \end{aligned}$$

Ferner sieht man durch Herunterziehen der Indizes, daß  $K_{\mu\nu}$ ,  $L_{\mu\nu}$  symmetrische Spinoren sind. Um die Umkehrungs-  
gleichungen zu finden, bilden wir den folgenden Ausdruck:

$$\sigma_k^{\lambda\mu} \sigma_l^{\nu\dot{\rho}} [\varepsilon_{\dot{\rho}\mu} K_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\lambda\nu} L_{\mu\dot{\rho}}] = K_{\lambda\nu} \sigma_l^{\nu\dot{\mu}} \sigma_k^{\lambda\mu} + \sigma_l^{\lambda\dot{\rho}} \sigma_k^{\lambda\mu} L_{\mu\dot{\rho}},$$

woraus man wieder die Umkehrungsgleichung abliest

$$I_{mn} = -\frac{1}{2} \sigma_m^{\lambda\mu} \sigma_n^{\nu\dot{\rho}} [\varepsilon_{\dot{\rho}\mu} K_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\lambda\nu} L_{\mu\dot{\rho}}]. \quad (18)$$

Der Beweis der Antisymmetrie folgt sofort aus  $\varepsilon_{\lambda\nu} = -\varepsilon_{\nu\lambda}$ ,  
 $\varepsilon_{\mu\dot{\rho}} = -\varepsilon_{\dot{\rho}\mu}$  zusammen mit der Symmetrie von  $L$  und  $K$ .

Wieder können wir verallgemeinern und dem in  $f$  Index-  
paaren antisymmetrischen Tensor  $I_{[m_1 n_1] [m_2 n_2] \dots [m_f n_f]}$  Spinoren  
zuordnen.

$$4^f K_{\nu_1 \mu_1; \nu_2 \mu_2; \dots} = (-)^f I_{[m_1 n_1] [m_2 n_2] \dots} \sigma^{m_1 \mu_1} \dot{\lambda}_1 \sigma^{n_1} \dot{\lambda}_1 \nu_1 \sigma^{m_2 \mu_2} \dot{\lambda}_2 \sigma^{n_2} \dot{\lambda}_2 \nu_2 \dots$$

Einem in  $f$  Indexpaaren antisymmetrischen Tensor läßt sich  
also ein Spinor von  $2^f$  (punktierten oder unpunktierten) Indizes  
zuordnen, der sich in je zwei aufeinanderfolgenden Indizes sym-  
metrisch verhält.

Einem antisymmetrischen Tensor läßt sich ein dualer Tensor  
zuordnen durch die Gleichungen

$$I^D_{kl} = \frac{-i}{2} \varepsilon_{klmn} I^{mn} \quad I^D{}^{kl} = -\frac{i}{2} \varepsilon^{klmn} I_{mn};$$

ausgeschrieben lauten diese:

$$I^D{}_{01} = iI^{23} \quad I^D{}_{12} = iI^{03}.$$

(Die Verallgemeinerung auf Tensoren mit  $f$  Indexpaaren ist so-  
fort ersichtlich.)

Als Selbstdual sprechen wir demgemäß einen Tensor an, wenn  $I^D_{kl} = I_{kl}$  ist. Der selbstduale Tensor ist also gekennzeichnet durch

$$\vec{K} = 0 \quad \vec{L} = i(I^{23}, I^{31}, I^{12})$$

oder im Matrizenschema durch die drei Kennzahlen  $L_x, L_y, L_z$  in folgender Weise:

$$I_{kl} = \begin{bmatrix} 0 & L_x & L_y & L_z \\ -L_x & 0 & iL_z & -iL_y \\ -L_y & -iL_z & 0 & iL_x \\ -L_z & iL_y & -iL_x & 0 \end{bmatrix}$$

Die Spinorzuordnung (16) wird zu:

$$\begin{aligned} Li\dot{1} &= L_x - iL_y \\ Li\dot{2} &= -L_z = L_2\dot{1} & K_{12} &= 0. \\ Li\dot{3} &= -L_x - iL_y \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Isomorphie der Drehungsgruppe und der unimodularen unitären Gruppe untersuchen wir die Transformationseigenschaften unserer Spinoren. Nach der Zuordnung (11) transformieren sich  $a^\mu$  nach  $\mathfrak{D}_{1/2, 0}$  und  $a_{\dot{\mu}}$  nach  $\mathfrak{D}_{0, 1/2}$  in folgender Weise (wir schreiben nur die Transformationsmatrix von  $\mathfrak{D}_{1/2, 0}$  an):

$$\begin{aligned} T_{1,2}(\varphi) &\rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix} & T_{1,3}(\varphi) &\rightarrow \begin{bmatrix} \cos \varphi/2 & -\sin \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 & \cos \varphi/2 \end{bmatrix} \\ T_{2,3}(\varphi) &\rightarrow \begin{bmatrix} \cos \varphi/2 & i \sin \varphi/2 \\ i \sin \varphi/2 & \cos \varphi/2 \end{bmatrix} & T_{0,1}(\varphi) &\rightarrow \begin{bmatrix} \cos \varphi/2 & \sin \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 & \cos \varphi/2 \end{bmatrix} \\ T_{0,2}(\varphi) &\rightarrow \begin{bmatrix} \cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2 & \\ i \sin \varphi/2 & \cos \varphi/2 \end{bmatrix} & T_{0,3}(\varphi) &\rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Dabei ist mit  $T_{j,k}(\varphi)$  die Drehung in der  $j$ - $k$ -Ebene durch den Winkel  $\varphi$  bezeichnet ( $j < k$ ).

Die Darstellungen der eigentlichen Lorentz-Gruppe  $\mathfrak{L}_4^+$  werden nun vom Substrat geliefert [siehe z. B. Van der Waerden<sup>3)</sup> oder Weyl<sup>4)</sup>]:

$$u^{\dot{1}} = \frac{(u^1)^k + m (u^2)^{k-m} (v_1)^{l+m'} (v_2)^{l-m'}}{\{(k+m)!(k-m)!(l+m')!(l-m')!\}^{1/2}} \quad \begin{matrix} m = k, k-1, \dots, -k \\ m' = l, l-1, \dots, -l \end{matrix} \quad (21)$$

Diese mit  $\mathfrak{D}_{k,l}$  bezeichnete Darstellung der Dimension  $d = (2k+1)(2l+1)$  läßt sich auch als direktes Produkt aus-

<sup>3)</sup> Van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik.

<sup>4)</sup> H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik.

drücken:  $\mathfrak{D}_{k,l} = \mathfrak{D}_{k,0} x \mathfrak{D}_{0,l}$ . Es transformiert sich der in punktierten und unpunkttierten Indizes symmetrische Spinor  $a_{\begin{smallmatrix} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_l \end{smallmatrix}}$  nach der Darstellung  $\mathfrak{D}_{k/2, l/2}$ .

Wenn wir nun die volle *Lorentz*-Gruppe  $\mathfrak{L}_4$  betrachten wollen, müssen wir die Spiegelung

$$S: x^0 \rightarrow x^0, \quad x^k \rightarrow -x^k \quad (k=1, 2, 3) \quad (22)$$

in unsere Betrachtungen mit einbeziehen. Gemäß der Zuordnung (11) finden wir die von  $S$  induzierte Transformation:

$$S: a^\lambda \rightarrow a_\lambda \quad a^\nu \rightarrow a_\nu.$$

Demgemäß wird das Substrat  $v_{m m'}$  in

$$w_{m m'} = \frac{(u_1^i)^{k+m} (u_2^i)^{k-m} (v^1)^{l+m'} (v^2)^{l-m'}}{(k+m)! (k-m)! (l+m')! (l-m')!}^{1/2} \quad (23)$$

übergeführt. Es geht also die Darstellung  $\mathfrak{D}_{k,l}$  in die Darstellung  $\mathfrak{D}_{l,k}$  über, woraus man ersieht, daß man zur Erfassung der vollen *Lorentz*-Gruppe die irreduziblen Darstellungen anzusetzen hat:

$D(k, l)$  Substrat  $v_{m m'}, w_{m m'}$  Dimension  $2(2k+1)(2l+1) \quad l > k$

$D(k, k)$  Substrat  $v_{m m'}$  Dimension  $(2k+1)^2$

Dementsprechend zerfällt diese Darstellung bei Beschränkung auf die eigentliche *Lorentz*-Gruppe:

$$D(k, l) = \mathfrak{D}_{k,l} + \mathfrak{D}_{l,k} \quad D(k, k) = \mathfrak{D}_{k,k}.$$

Um die Charaktere obiger Darstellungen aufzustellen, erinnern wir uns daran, daß der Klassenvertreter der eigentlichen *Lorentz*-Gruppe gegeben ist durch das Element  $T = T_{0,3}(\vartheta_2) \cdot T_{1,2}(\vartheta_1)$  [siehe z. B. *F. D. Murnaghan*<sup>5)</sup>].

Die Substrate nehmen bei  $T$  die Faktoren an:

$$\begin{aligned} v_{m m'} &\rightarrow \exp \{ i [m \vartheta_1 + m' \vartheta_1] + [m \vartheta_2 - m' \vartheta_2] \} v_{m m'} \\ w_{m m'} &\rightarrow \exp \{ i \vartheta_1 (m + m') + \vartheta_2 (m' - m) \} w_{m m'} \end{aligned} \quad (24)$$

Daraus lassen sich die Charaktere unserer Darstellungen ablesen zu:

$$\mathfrak{D}_{k,l}: \chi(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sum_{m=k}^{-k} \sum_{m'=l}^{-l} \exp \{ i (m + m') \vartheta_1 + (m - m') \vartheta_2 \} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} D(k, l): \chi(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sum_{m=k}^{-k} \sum_{m'=l}^{-l} [ \exp \{ i (m + m') \vartheta_1 + (m - m') \vartheta_2 \} + \\ + \exp \{ i (m + m') \vartheta_1 + (m' - m) \vartheta_2 \} ] \end{aligned} \quad (26)$$

<sup>5)</sup> *F. D. Murnaghan*, Theory of Group Representations.



Wir führen mit *Belinfante*<sup>6)</sup> noch das Substrat der Darstellung  $D(\frac{1}{2}, 0)$ , die Größe  $\psi_k = \begin{bmatrix} u^k \\ v_k \end{bmatrix}$ , als kovarianten Undor erster Stufe ein. Für die Undoren läßt sich analog wie für Spinoren eine Undoranalyse aufbauen:

$$\begin{aligned} \psi^k &= \psi_l \varepsilon^{lk} \\ \psi_k &= \varepsilon_{kl} \psi^l \end{aligned} \quad \varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk} = \begin{bmatrix} . & -1 & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & -1 & . \end{bmatrix} \quad (27)$$

Wie bei den Spinoren lassen sich auch bei den Undoren höhere Größen durch Bildung von direkten Produkten aufbauen; so wird z. B. der Undor zweiten Ranges in Matrixform geschrieben:

$$\psi_{k_1 k_2} \sim \begin{bmatrix} u^1_1 & u^1_2 & u^1_3 & u^1_4 \\ u^2_1 & u^2_2 & u^2_3 & u^2_4 \\ u^3_1 & u^3_2 & u^3_3 & u^3_4 \\ u^4_1 & u^4_2 & u^4_3 & u^4_4 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Dabei entsprechen die rein unpunktieren oder rein punktierten Spinoren nach (16) einem antisymmetrischen Tensor, die gemischten Spinoren einem Vektor. Man sieht also, daß im Gegensatz zu den höheren Spinoren die höheren Undoren keine einfachen kovarianten Größen der Art  $\mathfrak{L}_4$  sind, sondern vielmehr in mehrere irreduzible Substrate zerfallen.

### Infinitesimale Transformationen.

Zur Definition einer *Lorentz*-Transformation  $L = (t_l{}^k)$  läßt sich die metrische Matrix  $F = (g_{lk})$  verwenden:  $L' F L = F$  oder explizite

$$g_{kl} = g_{mn} t^m{}_k t^n{}_l. \quad (29)$$

Verstehen wir unter  $\alpha^k$  einen kontravarianten, unter  $p_k$  einen kovarianten Tensor 1. Stufe:

$$\alpha'^k = t^k{}_l \alpha^l \quad p'_k = p_l (t^{-1})^l{}_k,$$

so ist  $p_k \alpha^k$  invariant, und wir fordern die relativistische Invarianz der Gleichung  $\{p_k \alpha^k + \chi\} \psi = 0$ . (30)

Dabei sind  $\alpha^k$ -quadratische Matrizen vom Grade  $d$  und  $\chi$  ein mit der Ruhemasse zusammenhängender Skalar. Zu jeder *Lorentz*-Transformation  $L: x^k \rightarrow t^k{}_l x^l$  gehört eine Darstellungsmatrix  $S$ , so daß

$$\alpha^m = t^m{}_n (S \alpha^n S^{-1}) \quad (31)$$

ist.

<sup>6)</sup> *Belinfante*, Physica 6, 887, 849 (1939).

Die Gesamtheit der infinitesimalen Transformationen  $I^{rs}$  unserer Darstellung bezeichnen wir als den Kern der Darstellung. Er gehorcht, wie bekannt, der Gleichung:

$$[I^{mn}, I^{rs}] = -g^{mr} I^{ns} + g^{ms} I^{nr} + g^{nr} I^{ms} - g^{ns} I^{mr}. \quad (32)$$

In der Darstellung durch die Gruppe selbst ist dabei:

$$\begin{aligned} I^{23} &= \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & -1 \\ . & . & 1 & . \end{bmatrix} & I^{31} &= \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & -1 & . & . \end{bmatrix} & I^{12} &= \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & -1 & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \\ I^{01} &= \begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} & I^{02} &= \begin{bmatrix} . & . & 1 & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} & I^{03} &= \begin{bmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zu jeder Transformation  $x'^k = x^k + \varepsilon^k_l x^l$  und deren Darstellung  $S = E + \frac{1}{2} \varepsilon^k_l I^l_k$  erhalten wir aus (31)

$$[\alpha^m, I^{rs}] = g^{mr} \alpha^s - g^{ms} \alpha^r. \quad (33)$$

Aus dieser wichtigen Gleichung folgt die Analogie der Klammerprodukte  $[[\alpha^m, \alpha^n], I^{rs}]$  und  $[I^{mn}, I^{rs}]$  und damit die Proportionalität  $[\alpha^m, \alpha^n] = \text{const. } I^{mn}$ . Unter der Voraussetzung, daß der Faktor endlich ist, kann er durch eine Transformation entfernt werden:

$$[\alpha^m, \alpha^n] = I^{mn}. \quad (34)$$

Die infinitesimalen Transformationen bilden einen antisymmetrischen Tensor  $I^{rs} = -I^{sr}$  und können daher mittels (17) mit zwei Vektoren in Verbindung gebracht werden, die auf Grund von (32) den Relationen gehorchen:

$$[K_x, K_y] = iK_z \dots [L_x, L_y] = iL_z \dots [K_x, L_x] = [K_x, L_y] = [K_x, L_z] = 0 \dots$$

Daraus folgt speziell, daß diese Größen in einer irreduziblen Darstellung  $\mathfrak{D}_{k,l}$  die Gestalt haben:

$$\begin{aligned} (m | K_z | m) &= m \\ (m+1 | K_x + iK_y | m) &= [(k-m)(k+m+1)]^{1/2} \\ (m-1 | K_x - iK_y | m) &= [(k+m)(k-m+1)]^{1/2} \\ K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 &= k(k+1) \\ (m &= k, k-1, \dots, -k) \\ (m | L_z | m) &= m \\ (m+1 | L_x + iL_y | m) &= [(l-m)(l+m+1)]^{1/2} \\ (m-1 | L_x - iL_y | m) &= [(l+m)(l-m+1)]^{1/2} \\ L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 &= l(l+1) \\ (m &= l, l-1, \dots, -l). \end{aligned} \quad (36)$$

Aus der Spinordarstellung (16) resultieren zwei Matrizen:

$$K = \begin{bmatrix} K_1^1 & K_2^1 \\ K_1^2 & K_2^2 \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^3 (\sigma_r \times K_r) \quad L = \begin{bmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^3 (\sigma_r' \times L_r) \quad (37)$$

Dabei sind  $\sigma_r$ ,  $K_r$ ,  $\sigma_r'$ ,  $L_r$  die infinitesimalen Transformationen von bzw.  $\mathfrak{D}_{1/2, 0}$ ,  $\mathfrak{D}_{k, 0}$ ,  $\mathfrak{D}_{0, 1/2}$ ,  $\mathfrak{D}_{0, l}$ .

Obige Matrizen gehorchen den charakteristischen Gleichungen (unter Benützung von (36))

$$K^2 + K = k(k+1) \quad L^2 - L = l(l+1),$$

woraus weiter folgt, daß z. B.  $K$  die Eigenwerte  $k$  und  $-(k+1)$  besitzt. Wir setzen also, um  $K$  auf Hauptachsen zu transformieren, an:

$$U^{-1} D U \quad U^{-1} = (2k+1)^{-1/2} \begin{bmatrix} -u_1(k+1/2) & -u_2(k+1/2) \\ v_1(k) & v_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k E_m & 0 \\ 0 & -(k+1) E_n \end{bmatrix} \quad U^{-1} = (2k+1)^{-1/2} \begin{bmatrix} v^1(k+1/2) & u^1(k) \\ v^2(k+1/2) & u^2(k) \end{bmatrix}$$

und erhalten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -u_\mu(k+1/2) v^\mu(k+1/2) &= v_\mu(k) u^\mu(k) = 2k+1 \\ v_\mu(k) v^\mu(k+1/2) &= u_\mu(k+1/2) u^\mu(k) = 0 \\ -v^\mu(k+1/2) u_\nu(k+1/2) &= K_\nu{}^\mu(k) + (k+1) \delta^\mu{}_\nu \\ -u^\mu(k) v_\nu(k) &= K_\nu{}^\mu(k) - k \delta^\mu{}_\nu \end{aligned} \quad (39)$$

Indem wir die Eigenwerte der Gleichung

$$-v^1(k+1/2) u_1(k+1/2) = K_1^1 + (k+1)$$

betrachten, finden wir die Dimensionen:

$$\begin{aligned} v^\mu(k) &\dots 2k \text{ Zeilen } 2k+1 \text{ Spalten,} \\ u^\mu(k) &\dots 2k+1 \text{ Zeilen } 2k \text{ Spalten.} \end{aligned}$$

### Wellengleichungen mit Zusatzbedingungen.

Wir gehen von der Weylschen Überlegung aus, daß die Wellenfunktionen einfache kovariante Größen der Lorentz-Gruppe sein müssen; als solche bieten sich die in unpunktigten und punktigten Indizes symmetrischen Spinoren dar. Mit Dirac<sup>7)</sup> betrachten wir zwei Spinoren:

$$\begin{aligned} a^{(0)} \rho \dots 2k \text{ unpunktigte Indizes} & \quad \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{k, k-1/2} \\ \lambda \mu \dots 2k-1 \text{ punktigte Indizes} & \\ b^{(0)} \delta \rho \dots 2k-1 \text{ unpunktigte Indizes} & \quad \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{k-1/2, k} \\ \delta \lambda \dots 2k \text{ punktigte Indizes} & \end{aligned}$$

<sup>7)</sup> Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 155, 447 (1936).

Als Wellengleichungen fordern wir die linearen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\nu}}^{\rho} a_{\dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(0) \dot{\delta}} &= \kappa b_{\dot{\nu} \dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(0) \dot{\delta}} \\ \partial_{\dot{\nu}}^{\rho} b_{\dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(0) \dot{\delta}} &= \kappa a_{\dot{\nu} \dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(0) \dot{\delta}} \end{aligned} \quad (40)$$

Bei Beschränkung auf die Untergruppe  $\mathfrak{D}_3$  der Drehungen zerfallen diese Darstellungen nach dem Schema:

$$\mathfrak{D}_{k, k-1/2} \rightarrow \mathfrak{D}_{2k-1/2} + \dots \quad \mathfrak{D}_{k-1/2, k} \rightarrow \mathfrak{D}_{2k-1/2} + \dots$$

Sie gehören also zum gleichen Maximalspin. Dasselbe gilt für alle Spinoren, deren Gesamtsumme von punktierten und un-punktierten Indizes eine feste Größe ist. Wir können also die Gl. (40) durch die Definitionen ergänzen:

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\lambda}}^{\tau} a_{\dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(q) \dot{\rho} \dot{\delta}} &= \kappa a_{\dot{\mu}}^{(q+1) \tau \dot{\rho} \dot{\delta}} \\ \partial_{\dot{\lambda}}^{\tau} b_{\dot{\mu} \dot{\nu}}^{(q) \dot{\rho}} &= \kappa b_{\dot{\lambda} \dot{\mu} \dot{\nu}}^{(q+1) \dot{\rho}} \end{aligned} \quad (41)$$

Dabei ist

$$\left. \begin{array}{ll} a^{(q)} \begin{array}{l} 2k+q \text{ unpunktierte} \\ 2k-q-1 \text{ punktierte} \end{array} \text{ Indizes } \mathfrak{D}_{k+q/2, k-q/2-1/2} & \\ b^{(q)} \begin{array}{l} 2k-q-1 \text{ unpunktierte} \\ 2k+q \text{ punktierte} \end{array} \text{ Indizes } \mathfrak{D}_{k-q/2-1/2, k+q/2} & \end{array} \right\} D(k+q/2, k-q/2)$$

Zu (41) gehören die Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\lambda}}^{\tau} a_{\dot{\mu}}^{(q+1) \tau \dot{\rho} \dot{\delta}} &= \kappa a_{\dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(q) \dot{\rho} \dot{\delta}} \\ \partial_{\dot{\lambda}}^{\tau} b_{\dot{\lambda} \dot{\mu} \dot{\nu}}^{(q+1) \dot{\rho}} &= \kappa b_{\dot{\mu} \dot{\nu}}^{(q) \tau \dot{\rho}} \end{aligned} \quad (42)$$

Bei Spiegelungen bleibt nun das System (40) invariant, während je zwei Gleichungspaare der Art (41) und (42) ineinander übergehen, nämlich  $a^{(q)} \rightleftharpoons b^{(q)}$ ,  $a^{(q+1)} \rightleftharpoons b^{(q+1)}$ .

Als Nebenbedingung fordern wir, daß  $\partial_{\dot{\nu}}^{\rho} a_{\dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(q) \dot{\delta}}$  usw. auch alle symmetrisch in punktierten und unpunktierten Indizes sein sollen. Die gesamten Symmetriebedingungen drücken sich dann aus:

$$\varepsilon_{\dot{\nu} \dot{\lambda}} a_{\dot{\delta} \dot{\rho}}^{(q) \dot{\nu} \dot{\lambda}} = 0 \quad \varepsilon_{\dot{\delta} \dot{\rho}} a_{\dot{\delta} \dot{\rho}}^{(q) \dot{\nu} \dot{\lambda}} = 0 \text{ usw.} \quad (43)$$

$$\partial_{\dot{\rho}}^{\dot{\mu}} a_{\dot{\lambda} \dot{\mu}}^{(q) \dot{\delta}} = 0 \text{ usw.} \quad (44)$$

Vom gruppentheoretischen Gesichtspunkt aus gehören die in unserem Gleichungssystem vorkommenden Spinoren zu den Darstellungen:



$$k - 1/2, 0) + D(2k - 1, 1/2) + D(2k - 3/2, 1) + \dots + D(k, k - 1/2)$$

Alle diese Wellenfelder gehören also zum halbzahligen Spin  $f = 2k - 1/2$ .

Im Falle ganzzahligen Spins ist diese Theorie etwas abzuändern. Wir gehen aus von folgenden Spinoren:

$$\left. \begin{array}{ll} 2k \text{ unpunktierter} & \text{Indizes } \mathfrak{D}_{k,k} \\ 2k \text{ punktierte} & \end{array} \right\} D(k, k)$$

$$\left. \begin{array}{ll} 2k - q \text{ unpunktierter} & \text{Indizes } \mathfrak{D}_{k - q/2, k + q/2} \\ 2k + q \text{ punktierte} & \end{array} \right\} D(k + q/2, k - q/2)$$

$$\left. \begin{array}{ll} 2k + q \text{ unpunktierter} & \text{Indizes } \mathfrak{D}_{k + q/2, k - q/2} \\ 2k - q \text{ punktierte} & \end{array} \right\}$$

Die Definitionsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\rho}}^{\times \lambda} a_{\tau \mu}^{\cdot} &= \kappa b_{\dot{\rho} \tau \mu}^{(1) \lambda} & \partial_{\dot{\rho}}^{\times} b_{\tau \mu}^{(q) \times \lambda} &= \kappa b_{\dot{\rho} \tau \mu}^{(q+1) \lambda} \\ \partial_{\dot{\rho}}^{\times} a_{\rho \mu}^{\sigma \lambda} &= \kappa b_{\mu}^{(-1) \times \sigma \lambda} & \partial_{\dot{\rho}}^{\times} b_{\rho \mu}^{(-q) \sigma \lambda} &= \kappa b_{\mu}^{(-q-1) \times \sigma \lambda} \end{aligned} \quad (45)$$

Die Feldgleichungen hingegen:

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\rho}}^{\times} b_{\dot{\rho} \tau \mu}^{(1) \lambda} &= \kappa a_{\tau \mu}^{\times \lambda} & \partial_{\dot{\rho}}^{\times} b_{\dot{\rho} \tau \mu}^{(q+1) \lambda} &= \kappa b_{\tau \mu}^{(q) \times \lambda} \\ \partial_{\dot{\rho}}^{\times} b_{\mu}^{(-1) \times \sigma \lambda} &= \kappa a_{\rho \mu}^{\sigma \lambda} & \partial_{\dot{\rho}}^{\times} b_{\mu}^{(-q-1) \times \sigma \lambda} &= \kappa b_{\rho \mu}^{(-q) \sigma \lambda} \end{aligned} \quad (46)$$

Für alle Spinoren gelten die Symmetriebedingungen und die der Ableitungen:

$$a_{\mu \nu}^{\times \lambda} \varepsilon_{\times \lambda} = 0 \quad \partial_{\dot{\rho}}^{\mu} a_{\mu \lambda}^{\rho \delta} = 0 \text{ usw.} \quad (47)$$

Diese Gleichungen entsprechen dem gruppentheoretischen Schema

$$D(2k, 0) + D(2k - 1/2, 1/2) + \dots + D(k, k).$$

Bei Spiegelungen ist die Größe  $a$  invariant, während  $b^{(q)}$  in  $b^{(-q)}$  übergeht. Das System gehört also zum ganzzahligen Spin  $f = 2k$ .

Berücksichtigen wir die Zusammenhänge zwischen Spinoren und Tensoren, so erhalten wir im Falle ganzzahligen Spins die Tensorformulierung von Fierz und Pauli<sup>8)</sup>. Dem Spinor  $a$  läßt sich mittels (15) direkt ein Tensor zuordnen, der genau  $2k$  Tensorindizes hat. Dieser Tensor ist symmetrisch in allen Indizes  $A_{i_1 \dots} = A_{i_1 \dots}$  auf Grund der Symmetrie der Spinorindizes; seine Spuren verschwinden, d. h.  $A_{i i \dots} = 0$  wegen

<sup>8)</sup> Fierz, Helv. phys. Acta **12**, 3 (1939); Pauli u. Fierz, Helv. phys. Acta **12**, 297 (1939); Fierz u. Pauli, Proc. Roy. Soc. (A) **173**, 211 (1939).

der Relationen (9) und (47). Außerdem gelten die Divergenzgleichungen (Nebenbedingungen)  $\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik} = 0$ , welche nichts anderes besagen als  $\partial_{\mu} a^{\mu} = 0$ , d. h. (47). Auf Grund der Wellengleichungen (45) und (46) folgt schließlich die Wellengleichung 2. Ordnung:

$$\frac{1}{2} \partial_{\mu} \partial^{\mu} a + \kappa^2 a = 0,$$

oder in Tensorform

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} A_{kl} + \kappa^2 A_{kl} = 0.$$

Die Teilchen mit ganzzahligen Spin lassen sich also auch beschreiben durch ein Tensorfeld  $f = 2k$ -ter Stufe, mit den Wellengleichungen:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i} + \kappa^2 \right\} A_{klm} = 0 \quad A_{ikl} = A_{kil} \quad A_{iil} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ikl} = 0$$

Diese von *Fierz* abgeleitete Tensortheorie unterscheidet sich äußerlich von der unseren nur dadurch, daß er die euklidische *Lorentz*-Metrik zugrunde legt, während wir die pseudoeuklidische verwenden. Dadurch wird z. B. die Definition des „konjugierten Tensors“ überflüssig; unter dem gestrichelten (*Fierz*, l. c., Formel 2, 1) verstehen wir einfach den konjugiert-komplexen.

An Stelle von (48) läßt sich bekanntlich ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben, indem wir definieren:

$$B^{(0)} = A \quad \frac{\partial}{\partial x^i} B_{k\dots}^{(q-1)} - \frac{\partial}{\partial x^k} B_{i\dots}^{(q-1)} = B_{\dots [ik]}^{(q)} \quad (49a)$$

Dann erhalten wir als Folge von (48)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i} B^{(q)} + \kappa^2 B^{(q)} = 0 \quad (49b)$$

$$B_{\dots [ik]k}^{(q)} = 0 \quad B_{[ik]r\dots}^{(q)} + B_{\dots [ri]k}^{(q)} + B_{[kr]i\dots}^{(q)} = 0 \quad (49c)$$

$$B_{[ik][rs]\dots}^{(q)} + B_{[ri][ks]\dots}^{(q)} + B_{[kr][is]\dots}^{(q)} = 0$$

$$\frac{\partial B^{(q)}}{\partial x_r} [ik]\dots r = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x_r} B_{[ik]}^{(q)} + \frac{\partial}{\partial x_k} B_{[ri]}^{(q)} + \frac{\partial}{\partial x_i} B_{[kr]}^{(q)} = 0 \quad (49d)$$

und daraus weiter

$$\frac{\partial B^{(q)}}{\partial x_i} [ik] = \kappa^2 B_{k\dots}^{(q-1)} \quad B_{\dots [kl][ki]}^{(q)} = \kappa^2 B_{\dots l i\dots}^{(q-2)} \quad (49e)$$

Diese Gleichungen sind natürlich mit den zugehörigen Spinorgleichungen (45) bis (47) äquivalent. Speziell ist  $B^{(q)}$  ein Tensor mit  $2k - q$  untereinander symmetrischen Indizes und  $q$  antisymmetrischen Indexpaaren. Ein solcher Tensor entsteht aber gerade bei der Spinorzuordnung, da die Spinoren  $b^{(q)}, b^{(-q)}$   $2k - q$  Indexpaare (punktiert — unpunktiert) besitzen, denen man mittels (15) je einen symmetrischen Tensorindex zuordnen kann. Den restlichen  $2q$  unpunktierten (bzw.  $2q$  punktierten) Spinorindizes lassen sich dann noch  $q$  antisymmetrische Indexpaare zuordnen [Gl. (18)].

Die Spezialfälle  $f = 0$  und  $f = 1$  beschreiben die bekannten (skalaren und vektoriellen) Mesonengleichungen.

### Die Wellengleichungen ohne Zusatzbedingungen.

Wir betrachten das Problem, alle Gleichungen der Form (30) aufzustellen, für die (32) in Verbindung mit (34) gilt. Wir haben dabei die Algebra der zehn Matrizen  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, iI^{01}, I^{02}, I^{03}, I^{23}, I^{31}, I^{12}$  zu untersuchen. Die Vertauschungsrelationen für die  $I$  sagen nun aus, daß

$$[I^{mn}, I^{rs}] = -g^{nr} I^{sm}.$$

Setzen wir also z. B.  $iI^{23} = X, iI^{31} = Y, iI^{12} = Z$ , so gehorchen sie den Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls, woraus folgt, daß ihre Eigenwerte in jeder irreduziblen Darstellung  $\mathfrak{D}$  von  $\lambda$  bis  $-\lambda$  reichen ( $\lambda, \lambda - 1, \dots, -\lambda$ ) und demgemäß ihre charakteristische Gleichung durch

$$\{X^2 - \lambda^2\} \{X^2 - (\lambda - 1)^2\} \dots \begin{cases} X \\ X^2 - 1/4 \end{cases} = 0 \quad \begin{matrix} \lambda \text{ ganzzahlig} \\ \lambda \text{ halbzahlig} \end{matrix} \quad (50)$$

gegeben ist. Wir werden später sehen, daß unsere (reduzible) Darstellung durch zwei Zahlen charakterisiert ist ( $i', i''$ ), die beide ganz- oder halbzahlig sind; bezeichnen wir mit  $\lambda$  das Maximum aller dieser Zahlen, so gehorchen also alle vorkommenden Größen obigen charakteristischen Gleichungen und wir erhalten durch zwei analoge Betrachtungen das Resultat:

Setzen wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} X &= iI^{23} & Y &= iI^{31} & Z &= iI^{12} \\ X &= iI^{0n} & Y &= -iI^{ns} & Z &= I^{s0} & (n, s \neq 0 \quad n \neq s) \\ X &= i\alpha^m & Y &= i\alpha^n & Z &= iI^{mn} & (m \neq n) \end{aligned}$$

so erfüllen diese Größen die Vertauschungsrelationen

$$[X, Y] = iZ \quad [Y, Z] = iX \quad [Z, X] = iY \quad (51)$$

und gehorchen der charakteristischen Gleichung (50).

Wir führen einen 5. Index ein, durch die Definition

$$I^{m4} = -I^{4m} = \alpha^m \quad g^{44} = -1 \quad g^{m4} = 0 \quad (m \neq 4), \quad (52)$$

dann lassen sich die Gl. (32), (33) und (34) ersetzen durch die einzige:

$$[I^{KL}, I^{RS}] = -g^{KR} I^{LS} + g^{KS} I^{LR} + g^{LR} I^{KS} - g^{LS} I^{KR}. \quad (53)$$

Dabei laufen die Großbuchstaben von 0 bis 4. Die Lösung unseres Problems besteht also darin, die infinitesimalen Transformationen aller irreduziblen Darstellungen der  $\mathfrak{L}_5$  aufzusuchen und nachträglich  $I^{m4} = \alpha^m$  zu setzen.

Aus jeder irreduziblen Darstellung der orthogonalen Gruppe  $\mathfrak{O}'_n$  erhalten wir eine solche der zugehörigen Lorentz-Gruppe  $\mathfrak{L}_n$  mit Hilfe des unitären Tricks von Weyl. Da die irreduziblen Darstellungen der orthogonalen Gruppe bekannt sind (siehe z. B. F. D. Murnaghan<sup>5</sup>), können wir die Darstellungen  $R_5$  ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) angeben: ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ ). Den ganzzahligen Werten von  $\lambda_1, \lambda_2$  entsprechen die Tensor-, den halbzahligen die Spinordarstellungen; ihre Grade sind gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned} R_5(\lambda_1, \lambda_2): \quad d_5 &= \frac{2}{3} (\lambda_1 + \frac{3}{2}) (\lambda_2 + \frac{1}{2}) (\lambda_1 - \lambda_2 + 1) (\lambda_1 + \lambda_2 + 2) \\ R_4(\lambda_1, \lambda_2): \quad d_4 &= 2(\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \quad \lambda_2 \neq 0 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \quad \lambda_2 = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Beachten wir, daß der Klassenvertreter der Gruppen  $\mathfrak{O}'_4, \mathfrak{O}'_5: T = T(\mathfrak{O}'_1, \mathfrak{O}'_2)$  aus zwei Drehwinkeln besteht und daß die Charaktere der durch  $\lambda_1, \lambda_2$  indizierten Darstellung gegeben sind,

$$X(\mathfrak{O}'_1, \mathfrak{O}'_2) = \sum_{m_1, m_2} \rho(m_1, m_2) \quad \rho(m_1, m_2) = \sum \exp \{ i m_1 \vartheta_1 + i m_2 \vartheta_2 \}$$

(Summe über alle Permutationen und Vorzeichenvertauschungen der Drehwinkel), so sieht man, daß bei lexikographischer Ordnung der führende Term in  $X(\lambda_1, \lambda_2): \rho(\lambda_1, \lambda_2) = \sum \exp \{ i \lambda_1 \vartheta_1 + i \lambda_2 \vartheta_2 \}$  ist. Durch den unitären Trick (indem man  $\vartheta_2$  in einen hyperbolischen Winkel verwandelt) und durch Vergleich mit dem führenden Term der Darstellung  $D(k, l)$  [Formel (26)] findet man

$$\lambda_1 = k + l \quad \lambda_2 = |k - l| \quad (55)$$

Die infinitesimalen Transformationen gehorchen also auf jeden Fall der charakteristischen Gleichung mit  $\lambda_1$ , wir können also als Spin die Größe  $\lambda_1$  ansehen. Sind also die  $\alpha$  irreduzible Größen einer in  $R_5(\lambda_1, \lambda_2)$  enthaltenen Darstellung  $\alpha^m = I^{m4}$ , so sehen wir die zugehörige Gleichung als zum Spin  $\lambda_1$  gehörig an.

Aus  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  und beide ganz- oder halbzahlig folgt weiter, daß es zu einem festen  $\lambda_1, \lambda_1 + 1$  ( $\lambda_1 + 1/2$ ) verschiedene Gleichungen gibt, wenn  $\lambda_1$  ganzzahlig (halbzahlig) ist.



Tabelle 1.

Maxi- mal Spin	$R_5(\lambda_1, \lambda_2)$	Zerfall über $\mathcal{L}_4$	$D(k, l)$	$d_5$	$d_4$	Spinor- darstellung nach Dirac
0	$R_5(0, 0)$	$R_4(0, 0)$	$D(0, 0)$	1	1	$f = 0$
$1/2$	$R_5(1/2, 1/2)$	$R_4(1/2, 1/2)$	$D(1/2, 0)$	4	4	$f = 1/2$
1	$R_5(1, 0)$	$R_4(1, 0) + R_4(0, 0)$	$D(1/2, 1/2) + D(0, 0)$	5	4 + 1	Skalare Mesonentheorie
	$R_5(1, 1)$	$R_4(1, 1) + R_4(1, 0)$	$D(1, 0) + D(1/2, 1/2)$	10	6 + 4	Vektorielle Mesonentheorie
	$R_5(3/2, 1/2)$	$R_4(3/2, 1/2) + R_4(1/2, 1/2)$	$D(1, 1/2) + D(1/2, 0)$	16	12 + 4	Typus $E$
$3/2$	$R_5(3/2, 3/2)$	$R_4(3/2, 3/2) + R_4(3/2, 1/2)$	$D(3/2, 0) + D(1, 1/2)$	20	8 + 12	Typus $C$ (Bhabha)
	$R_5(2, 0)$	$R_4(2, 0) + R_4(1, 0) + R_4(0, 0)$	$D(1, 1) + D(1/2, 1/2) + D(0, 0)$	14	9 + 4 + 1	Typus $D$
	$R_5(2, 1)$	$R_4(2, 1) + R_4(1, 1) + R_4(2, 0) + R_4(1, 0)$ $D(3/2, 1/2) + D(1, 0) + D(1, 1) + D(1/2, 1/2)$		35	16 + 6 + 9 + 4	Typus $F$
2	$R_5(2, 2)$	$R_4(2, 2) + R_4(1, 1) + R_4(2, 0)$	$D(2, 0) + D(3/2, 1/2) + D(1, 1)$	35	10 + 16 + 9	Typus $C$

Wir diskutieren in einer Tabelle die einfachen Fälle einschließlich der Dimensionen und dem Zerfall über der in  $\mathfrak{L}_5$  enthaltenen Untergruppe  $\mathfrak{L}_4$ . (Die Zerlegungen berechnet man mit Hilfe der Charakterformeln von *Murnaghan*.)

Die Konstante  $\chi$  hängt mit der Ruhemasse zusammen. Um ihren Wert zu finden, müssen wir die Gl. (30) iterieren. Das geschieht, indem wir im Operator  $P = p_k \alpha^k$  die  $p_k$  als einfache Zahlen ansehen (Existenz einer ebenen Welle). Aus der charakteristischen Gleichung von  $P$  und der Invarianz gegen *Lorentz*-Transformation folgt, daß die  $p_k$  nur in der Kombination  $p^2 = p_k p^k$  auftreten können. Gehen wir somit ins Ruhesystem  $p^2 = p_0 p^0$ , so erfüllt  $P^2$  wegen (50) die charakteristische Gleichung:

$$\{\chi^2 - p^2 \lambda^2\} \{\chi^2 - p^2 (\lambda - 1)^2\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \chi^2 - p^2 \\ \chi^2 - p^2/4 \end{array} \right\} \chi = 0. \quad (56)$$

Dabei ist  $\lambda$  der Maximalspin des Teilchens. Ersetzen wir  $p^2 = p_k p^k$  durch seine Bedeutung  $-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k}$ , so beschreibt jeder Klammerausdruck eine *Klein-Gordon*-Gleichung eines Partikels mit der Masse  $\kappa^2 = \chi^2/(\lambda - r)^2$ . Wir haben also die möglichen Massenwerte

$$\begin{array}{lll} \kappa = \pm \chi, \pm \chi/2, \dots & \pm \chi/\lambda_1 & \lambda_1 \text{ ganzzahlig,} \\ \kappa = \pm 2\chi, \pm 2\chi/3, \dots & \pm 2\chi/2\lambda_1 & \lambda_1 \text{ halbzahlig.} \end{array}$$

Die Größe  $\kappa$  ist mit der Masse, wie üblich, durch die Gleichung  $\kappa = mc/\hbar$  verbunden.

Wir bestimmen die Gestalt der Wellengleichungen mit Hilfe der Relation  $[ \alpha^m, I^r s ] = g^{mr} \alpha^s - g^{ms} \alpha^r$ , die sich in Spinorform auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$\begin{aligned} 2[A^{\beta\dot{\lambda}}, K^{\gamma\rho}] &= \varepsilon^{\beta\gamma} A^{\rho\dot{\lambda}} + \varepsilon^{\beta\rho} A^{\gamma\dot{\lambda}} \\ 2[A^{\beta\dot{\lambda}}, L^{\mu\dot{\nu}}] &= \varepsilon^{\dot{\nu}\dot{\lambda}} A^{\beta\dot{\mu}} + \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\lambda}} A^{\beta\dot{\nu}} \end{aligned} \quad (57)$$

Die zu einer Darstellung  $R_5(\lambda_1, \lambda_2)$  gehörigen Matrizen  $I^r s$  müssen über der vierdimensionalen *Lorentz*-Gruppe gemäß der Formel zerfallen:

$$R_5(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_s D(k_s, l_s) \quad I^r s = I^r s(k_1 l_1) + I^r s(k_2 l_2) + \dots$$

$K^{\gamma\rho}$  und  $L^{\mu\dot{\nu}}$  erhalten genau dieselbe Form, während wir  $A^{\beta\dot{\lambda}}$  gemäß obiger Stufenform unterteilen. Unsere Gleichungen schreiben sich dann in Übermatrizenform, wenn wir noch den Ansatz machen:

$$(k_s l_s | A^{\beta\dot{\lambda}} | k_t l_t) = (k_s | A^{\beta} | k_t) (l_s | A^{\dot{\lambda}} | l_t) \quad (58)$$

folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
& (k_s | A^\beta | k_t) K^{\gamma\rho} (k_t) - K^{\gamma\rho} (k_s) (k_s | A^\beta | k_t) = \\
& = \frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\gamma} (k_s | A^\rho | k_t) + \frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\rho} (k_s | A^\gamma | k_t) \\
& (l_s | A^\lambda | l_t) L^{\mu\dot{\nu}} (l_t) - L^{\mu\dot{\nu}} (l_t) (l_s | A^\lambda | l_t) = \\
& = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\dot{\lambda}} (l_s | A^{\dot{\nu}} | l_t) + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\dot{\nu}} (l_s | A^\lambda | l_t)
\end{aligned} \tag{59}$$

Obiger Ansatz (58) bedeutet, daß  $A^{\lambda\dot{\mu}}$  als direktes Produkt der beiden Matrizen  $A^\lambda$  und  $A^{\dot{\mu}}$  angesetzt wird, wobei in der Doppelindizierung  $k, l$   $A^\beta$  nur von  $k_s, k_t$  abhängt. Dabei sind  $A^\lambda$ , bzw.  $A^{\dot{\mu}}$  Matrizen mit  $2k_s + 1$  Zeilen und  $2k_t + 1$  Spalten, bzw.  $2l_s + 1$  Zeilen und  $2l_t + 1$  Spalten. Die Bestimmung der Matrizen  $A^\lambda, A^{\dot{\mu}}$  beginnen wir damit, daß wir zeigen:

$$\begin{aligned}
(k_s | A^\beta | k_t) &= 0 \\
(l_s | A^\lambda | l_t) &= 0
\end{aligned} \quad \text{wenn} \quad \begin{aligned} k_s &\neq k_t \pm 1/2 \\ l_s &\neq l_t \pm 1/2 \end{aligned} \tag{60}$$

Der Weg des Beweises ist folgender (siehe hiezu die Arbeit von Bhabha<sup>1)</sup>): Wir setzen in (59)  $\beta = \gamma = 1, \rho = 2$ , bzw.  $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 1, \dot{\nu} = 2$  und erhalten die Gleichungen

$$k_s | A^1 | k_t m' \rangle \{ m' - m - 1/2 \} = 0 \quad (m l_s | A^1 | l_t m') \{ m' - m + 1/2 \} = 0$$

Analog, wenn wir  $\beta = \gamma = 2, \rho = 1$ , bzw.  $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 2, \dot{\nu} = 1$  setzen:

$$k_s | A^2 | k_t m' \rangle \{ m' - m + 1/2 \} = 0 \quad (m l_s | A^2 | l_t m') \{ m' - m - 1/2 \} = 0$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
m &= k_s, k_s - 1, \dots - k_s \\
m' &= k_t, k_t - 1, \dots - k_t
\end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} m &= l_s, l_s - 1, \dots - l_s \\ m' &= l_t, l_t - 1, \dots - l_t \end{aligned}$$

Die obigen Matrixelemente sind also nur von Null verschieden, wenn die geschlungenen Klammern verschwinden. Wir erhalten also nur die folgenden Typen von Untermatrizen:

$$\begin{aligned}
& (m, k_s | A^1 | k_t, m + 1/2) | (m, k_s | A^2 | k_t, m - 1/2), \\
& (m, l_s | A^1 | l_t, m - 1/2), (m, l_s | A^2 | l_t, m + 1/2).
\end{aligned}$$

Die Klammerrelationen können aber wegen des Wertebereiches von  $m$  und  $m'$  nur erfüllt sein, wenn sich  $k_s$  und  $k_t$  ( $l_s$  und  $l_t$ ) um eine halbganze Zahl unterscheiden. Setzen wir weiter  $\beta = \gamma = \rho = 1$  und  $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = \dot{\nu} = 1$ , so erhalten wir unter Berücksichtigung des eben Gesagten:

$$\begin{aligned}
& (m k_s | A^1 | k_t m + 1/2) [(k_t + m + 3/2) (k_t - m - 1/2)]^{1/2} = \\
& = [(k_s + m + 1) (k_s - m)]^{1/2} (m + 1, k_s | A^1 | k_t, m + 3/2) \\
& (m l_s | A^1 | l_t m - 1/2) [(l_t - m + 3/2) (l_t + m - 1/2)]^{1/2} = \\
& = [(l_s - m + 1) (l_s + m)]^{1/2} (m - 1, l_s | A^1 | l_t, m - 3/2)
\end{aligned} \tag{61}$$

Setzen wir nun in der ersten Gleichung (61)  $k_t = k_s + \frac{n}{2} = k + \frac{n}{2}$ , so erhalten wir eine Gleichung, aus der man (für positives  $n > 1$ ) folgendes ersieht: Für  $m = k$  existiert das Matricelement auf der linken Seite, während die rechte Seite verschwindet; also muß entweder  $(k, k | A^1 | k + \frac{n}{2}, k + \frac{1}{2}) = 0$  oder  $(2k + \frac{n}{2} + \frac{3}{2}) (\frac{n}{2} - \frac{1}{2}) = 0$  sein. Im oberen Fall würde durch Rekursionsschluß folgen, daß alle Matricelemente dieser Art verschwinden müssen; also muß die untere Alternative gelten, welche besagt, daß  $n = 1$  ist. Der analoge Schluß gilt für die punktierte Gleichung, und im Falle  $n \leq -1$  erhalten wir auf diese Art  $n = -1$ .

Für die nun übrigbleibenden Typen

$$\begin{array}{llll} k_t = k + \frac{1}{2} & l_t = l + \frac{1}{2} & k_t = k - \frac{1}{2} & l_t = l - \frac{1}{2} \\ k_s = k & l_s = l & k_s = k & l_s = l \end{array}$$

können wir die Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} (m, k | A^1 | k + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}) [(k + m + 2) (k - m)]^{1/2} &= \\ = [(k + m + 1) (k - m)]^{1/2} (m + 1, k | A^1 | k + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}) \\ (m, k | A^1 | k - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}) [(k + m + 1) (k - m - 1)]^{1/2} &= \\ = [(k + m + 1) (k - m)]^{1/2} (m + 1, k | A^1 | k - \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}) \\ (m, l | A^1 | l + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}) [(l - m + 2) (l + m)]^{1/2} &= \\ = [(l - m + 1) (l + m)]^{1/2} (m - 1, l | A^1 | l + \frac{1}{2}, m - \frac{3}{2}) \\ (m, l | A^1 | l - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}) [(l - m + 1) (l + m - 1)]^{1/2} &= \\ = [(l - m + 1) (l + m)]^{1/2} (m - 1, l | A^1 | l - \frac{1}{2}, m - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen sind die Matricelemente bis auf konstante Faktoren bestimmt. Die Lösungen mit den Faktoren  $+1$  (bei der dritten Lösung  $-1$ ) bezeichnen wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (k | A^\mu | k + \frac{1}{2}) &\sim v^\mu (k + \frac{1}{2}) \\ (k | A^\mu | k - \frac{1}{2}) &\sim u^\mu (k) \\ (l | A^\mu | l + \frac{1}{2}) &\sim -v^\mu (l + \frac{1}{2}) \\ (l | A^\mu | l - \frac{1}{2}) &\sim u^\mu (l) \end{aligned} \quad (62)$$

(Das Minuszeichen muß gesetzt werden, damit nachher die punktierten Größen dieselben Relationen erfüllen wie die un-punktierten.)

Wie man sofort ablesen kann, lauten die Lösungen:

$$\begin{aligned} (m | v^1 (k + \frac{1}{2}) | m + \frac{1}{2}) &= [k + m + 1]^{1/2} \\ (m | u^1 (k) | m + \frac{1}{2}) &= [k - m]^{1/2} \\ (m | v^1 (l + \frac{1}{2}) | m - \frac{1}{2}) &= -[l - m + 1]^{1/2} \\ (m | u^1 (l) | m - \frac{1}{2}) &= [l + m]^{1/2} \end{aligned} \quad (63)$$



Zur Bestimmung der Spinoren mit dem Index 2 setzen wir  $\beta = 1$ ,  $\gamma = \rho = 2$ , bzw.  $\lambda = 1$ ,  $\mu = \nu = 2$  und erhalten vier Gleichungen, die die Matrixelemente der Spinoren mit dem Index 2 zurückführen auf die der bereits bekannten Spinoren mit dem Index 1. Auf diese Art bekommen wir

$$\begin{aligned} (m | v^2(k + 1/2) | m - 1/2) &= [k - m + 1]^{1/2} \\ (m | u^2(k) | m - 1/2) &= -[k + m]^{1/2} \\ (m | v^2(l + 1/2) | m + 1/2) &= [l + m + 1]^{1/2} \\ (m | u^2(l) | m + 1/2) &= [l - m]^{1/2} \end{aligned} \quad (64)$$

Wie man sofort durch Ausrechnen bestätigt, erfüllen die eben berechneten Spinoren folgende Relationen (dabei sind die Dimensionen:  $v_\mu(k)$  und  $v^\mu(k)$   $2k$  Zeilen,  $2k + 1$  Spalten,  $u_\mu(k)$  und  $u^\mu(k)$   $2k + 1$  Zeilen,  $2k$  Spalten):

$$\begin{aligned} -u_\mu(k + 1/2) v^\mu(k + 1/2) &= v_\mu(k) u^\mu(k) = 2k + 1 \\ v_\mu(k) v^\mu(k + 1/2) &= u_\mu(k + 1/2) u^\mu(k) = 0 \\ -v^\mu(k + 1/2) u_\nu(k + 1/2) &= K_{\nu}{}^\mu(k) + (k + 1) \delta_{\nu}^\mu \\ -u^\mu(k) v_\nu(k) &= K_{\nu}{}^\mu(k) - k \delta_{\nu}^\mu \end{aligned} \quad (65a)$$

$$\begin{aligned} -u_\mu(l + 1/2) v^\mu(l + 1/2) &= v_\mu(l) u^\mu(l) = 2l + 1 \\ v_\mu(l) v^\mu(l + 1/2) &= u_\mu(l + 1/2) u^\mu(l) = 0 \\ -v^\mu(l + 1/2) u_\nu(l + 1/2) &= L_{\nu}{}^\mu(l) + (l + 1) \delta_{\nu}^\mu \\ -u^\mu(l) v_\nu(l) &= L_{\nu}{}^\mu(l) - l \delta_{\nu}^\mu \end{aligned} \quad (65b)$$

Wir erhalten also das Resultat, daß die einzigen nicht verschwindenden Übermatrixelemente die Form haben:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (k, l | A^{\beta\lambda} | k + 1/2, l - 1/2) &= c v^\beta(k + 1/2) u^\lambda(l) \\ (k + 1/2, l - 1/2 | A^{\beta\lambda} | k, l) &= d u^\beta(k + 1/2) v^\lambda(l) \end{aligned} \right\} \text{Kopplung 1. Art} \\ (k, l) \rightleftharpoons (k + 1/2, l - 1/2) \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (k, l | A^{\beta\lambda} | k + 1/2, l + 1/2) &= c v^\beta(k + 1/2) v^\lambda(l + 1/2) \\ (k + 1/2, l + 1/2 | A^{\beta\lambda} | k, l) &= d u^\beta(k + 1/2) u^\lambda(l + 1/2) \end{aligned} \right\} \text{Kopplung 2. Art} \\ (k, l) \rightleftharpoons (k + 1/2, l + 1/2) \end{aligned}$$

Die Konstanten kann man noch durch die Bemerkung vereinfachen, daß durch eine die  $I$  ungeändert lassende Transformation  $\alpha^k \rightarrow Q \alpha^k Q^{-1}$  die Konstanten mit der Nebenbedingung  $c, d = \text{const.}$  variiert werden können:

$$c = a^{1/2} \quad d = -a^{1/2}.$$

### Spezielle Typen von Wellengleichungen.

Da die Gl. (30) auch gegen Spiegelungen invariant sein muß, muß in der Zerlegung von  $R_5(l_1, l_2)$  mit  $\mathfrak{D}_{k, l}$  auch  $\mathfrak{D}_{l, k}$  auf-

scheinen. Wir zerlegen auch die Wellenfunktion  $\psi = \psi(k_1, l_1) + \psi(k_2, l_2) + \dots$  und betrachten folgende Spezialfälle:

### A. Nur eine Bindung der 1. Art.

Das Schema dieses Falles ist gegeben durch

$$(k, l) \rightleftharpoons (k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}).$$

Daraus ersieht man, daß der Matrixvektor die Form erhält:

$$A^{\beta\lambda} = c \begin{bmatrix} 0 & v^{\beta}(k + \frac{1}{2}) u^{\lambda}(l) \\ -u^{\beta}(k + \frac{1}{2}) v^{\lambda}(l) & 0 \end{bmatrix}$$

und damit wird das Gleichungssystem, wenn wir noch den Faktor  $1/2$  in die Konstante hineinziehen:

$$\begin{aligned} c p_{\beta\lambda} v^{\beta}(k + \frac{1}{2}) u^{\lambda}(l) \psi(k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}) + \chi \psi(k, l) &= 0 \\ -c p_{\beta\lambda} u^{\beta}(k + \frac{1}{2}) v^{\lambda}(l) \psi(k, l) + \chi \psi(k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}) &= 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Diese Gleichungen sind mit den *Diracschen* identisch und lassen sich folgendermaßen in diese überführen: Zuerst bemerkt man, daß dem System (67) äquivalent ist das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} p_{\lambda\beta} v^{\beta}(k + \frac{1}{2}) \psi(k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}) - \left[ \frac{2k+1}{2l} \right]^{1/2} \chi v_{\lambda}(l) \psi(k, l) \\ p^{\beta\lambda} v_{\lambda}(l) \psi(k, l) = \left[ \frac{2l}{2k+1} \right]^{1/2} \chi v^{\beta}(k + \frac{1}{2}) \psi(k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Denn durch Multiplikation mit  $u^{\lambda}(l)$ , bzw.  $u_{\beta}(k + \frac{1}{2})$  erhält man obiges System zurück. Multiplizieren wir hingegen mit  $v^{\lambda}(l - \frac{1}{2})$ , bzw.  $v_{\beta}(k)$ , so erhalten wir die Nebenbedingungen in der Form:

$$\begin{aligned} p_{\lambda\beta} v_{\lambda}(l - \frac{1}{2}) v_{\beta}(k + \frac{1}{2}) \psi(k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}) &= 0 \\ p^{\beta\lambda} v_{\beta}(k) v_{\lambda}(l) \psi(k, l) &= 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Setzen wir also, wobei wir die Größe  $\chi$  mit  $\kappa$  identifizieren,

$$v^{\beta}(k + \frac{1}{2}) \psi(k + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}) = [2k+1]^{1/2} a^{\beta} \dots$$

$$v_{\lambda}(l) \psi(k, l) = [2l]^{1/2} b_{\lambda} \dots$$

so erhalten wir aus (67) das Gleichungssystem in der ursprünglichen *Diracschen* Form:

$$p_{\lambda\beta} a^{\beta} \dots = \kappa b_{\lambda} \dots$$

$$p^{\beta\lambda} b_{\lambda} \dots = \kappa a^{\beta} \dots$$

Schließlich untersuchen wir noch, ob Gleichung (34) in unserem Fall erfüllt ist:  $[\alpha^m, \alpha^n] = I^{mn}$ . Die linke Seite kann als anti-

symmetrischer Tensor dargestellt werden:  $4 B_{\mu}{}^{\mu} = -[A_{\mu}{}^{\lambda}, A_{\lambda}{}^{\mu}]$ ,  $4 B_{\mu}{}^{\lambda} = [A_{\mu}{}^{\nu}, A_{\nu}{}^{\lambda}]$ , und die zu prüfende Gleichung nimmt die Form an:

$$B_0{}^{\mu} = K_0{}^{\mu} \quad B_{\mu}{}^{\lambda} = L_{\mu}{}^{\lambda} \quad (69)$$

Daß die Nichtdiagonalelemente verschwinden, ist sofort ersichtlich; für die Diagonalelemente erhalten wir

$$4(k, l | B_{\rho}{}^{\mu} | k, l) = -2a(2l) K_{\rho}{}^{\mu}(k)$$

$$4(k + 1/2, l - 1/2 | B_{\rho}{}^{\mu} | k + 1/2, l - 1/2) = 2a(2l + 1) K_{\rho}{}^{\mu}(k + 1/2)$$

d. h.  $B_{\rho}{}^{\mu} = K_{\rho}{}^{\mu}$  kann nur erreicht werden, wenn  $k = 0$  gesetzt wird ( $K_{\rho}{}^{\mu}(0) = 0$ ), in welchem Fall wir dann  $a = 1$  setzen können und die Dirac-Gleichung erhalten:  $(1/2, 0) = (0, 1/2)$ .

Die Dirac-Gleichung ist also die einzige vom Typus A ohne Zusatzbedingungen.

### B. Nur eine Bindung der 2. Art.

Hier ist das Schema

$$(k, l) = (k - 1/2, l + 1/2)$$

und daraus der Matrixvektor gegeben durch:

$$A^{\lambda}{}_{\mu} = c \begin{bmatrix} 0 & v^{\lambda}(k + 1/2) v^{\mu}(l + 1/2) \\ -u^{\lambda}(k + 1/2) u^{\mu}(l + 1/2) & 0 \end{bmatrix}$$

Die Wellengleichungen erhalten die Gestalt:

$$c p_{\beta}{}^{\lambda} v^{\beta}(k + 1/2) v^{\lambda}(l + 1/2) \psi(k - 1/2, l + 1/2) + \chi \psi(k, l) = 0 \\ + c p_{\beta}{}^{\lambda} u^{\beta}(k + 1/2) u^{\lambda}(l + 1/2) \psi(k, l) - \chi \psi(k + 1/2, l + 1/2) = 0 \quad (70)$$

Verfahren wir, um die Gültigkeit von Gl. (34) zu prüfen, in der obigen Weise, so gelangen wir zu den beiden Relationen:

$$(k, l | B_{\rho}{}^{\mu} | k, l) = \frac{a}{2} (2l + 2) K_{\rho}{}^{\mu}(k)$$

$$(k + 1/2, l + 1/2 | B_{\rho}{}^{\mu} | k + 1/2, l + 1/2) = -\frac{a}{2} (2l + 1) K_{\rho}{}^{\mu}(k + 1/2)$$

Wieder sind diese Gleichungen nur erfüllbar für  $k = 0, l = 0$ , und wir sehen, daß die einzige Gleichung vom Typus B ohne Zusatzbedingungen zu dem Schema gehört:  $(0, 0) = (1/2, 1/2)$ . Dieses Gleichungssystem beschreibt die skalare Mesonentheorie.

### Typus C.

$$(k, l) = (k + 1/2, l - 1/2) = \dots (k + n + 1/2, l - n - 1/2).$$

Hier müssen wir zu jedem Bindungspaar eine eigene Konstante nehmen, die wir analog den Zeilen durchnummerieren. Damit erhalten wir:

$$(k+r, l-r | A^{\mu \dot{\lambda}} | k+r+1, l-r-1) = a_r^{1/2} v^{\mu} (k+r+1) u^{\dot{\lambda}} (l-r)$$

$$(k+r+1, l-r-1 | A^{\mu \dot{\lambda}} | k+r, l-r) = -a_r^{1/2} u^{\mu} (k+r+1) v^{\dot{\lambda}} (l-r)$$

und es wird unser

$$A^{\mu \dot{\lambda}} = \begin{vmatrix} 0 & a_0^{1/2} v^{\mu} (k+1) u^{\dot{\lambda}} (l) & 0 \\ -a_0^{1/2} u^{\mu} (k+1) v^{\dot{\lambda}} (l) & 0 & a_{1/2}^{1/2} v^{\mu} (k+1) u^{\dot{\lambda}} (l-1/2) \\ 0 & -a_{1/2}^{1/2} u^{\mu} (k+1) v^{\dot{\lambda}} (l-1/2) & 0 \\ 0 & & \end{vmatrix}$$

Die Gleichungen, die notwendig sind, um (34) zu garantieren, nehmen hier die Form an:

$$(k+r, l-r | B_{\rho}^{\mu} | k+r, l-r) =$$

$$= \frac{1}{2} \{ (2l-2r+2) a_{r-1/2} - (2l-2r) a_r \} K_{\rho}^{\mu} (k+r)$$

$$(k+r, l-r | B_{\mu}^{\dot{\lambda}} | k+r, l-r) =$$

$$= \frac{1}{2} \{ -(2k+2r) a_{r-1/2} + (2k+2r+2) a_r \} L_{\mu}^{\dot{\lambda}} (l-r)$$

Die Forderung  $B_{\rho}^{\mu} = K_{\rho}^{\mu}$  besagt also, daß wir ein Gleichungssystem zu lösen haben (in dem wir die Klammerausdrücke für alle möglichen  $r$  gleich 2 setzen), das lauter positive  $a_r$  liefert; dies stellt jedoch einen Widerspruch zur letzten Gleichung  $-2la_0 = 2$  dar, der nur vermeidbar ist durch  $k=0$ . Ebenso erfordert die Gültigkeit von  $B_{\mu}^{\dot{\lambda}} = L_{\mu}^{\dot{\lambda}}$   $l-u-1/2=0$ . In diesem Falle können wir alle  $a_r = 1$  setzen und erhalten für den einzig-möglichen Typus ( $k+l=\lambda_1$ ) das Schema

$$(0, \lambda_1) \rightleftharpoons (1/2, \lambda_1 - 1/2) \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons (\lambda_1, 0)$$

und damit den zugehörigen Matrixvektor:

$$A^{\mu \dot{\lambda}} = \begin{vmatrix} 0 & v^{\mu} (1/2) u^{\dot{\lambda}} (l) & 0 \\ -u^{\mu} (1/2) v^{\dot{\lambda}} (l) & 0 & v^{\mu} (1) u^{\dot{\lambda}} (l-1/2) \\ 0 & -u^{\mu} (1) v^{\dot{\lambda}} (l-1/2) & 0 \\ 0 & 0 & -u^{\mu} (3/2) v^{\dot{\lambda}} (l-1) \end{vmatrix}$$



Ebenso als Wellengleichung:

$$-p_\beta \dot{\chi} u^\beta(r) v^\dot{\lambda}(l-r+1/2) \psi(r-1/2, l-r+1/2) + \quad (71) \\ + p_\beta \dot{\chi} v^\beta(r+1/2) u^\dot{\lambda}(l-r) \psi(r+1/2, l-r-1/2) + \chi \psi(r, l-r) = 0.$$

Wie man sofort aus unseren Zerlegungsformeln sieht, gehört dieser Typus zur Darstellung  $R_5(\lambda_1, \lambda_1)$ . Spezielle Beispiele sind:

$$\begin{aligned} R_5(1/2, 1/2) &= \mathfrak{D}_{1/2, 0} + \mathfrak{D}_{0, 1/2} && \text{Dirac-Gleichung,} \\ R_5(1, 1) &= \mathfrak{D}_{1, 0} + \mathfrak{D}_{1/2, 1/2} + \mathfrak{D}_{0, 1} && \text{Vektorielle Mesonen-} \\ &&& \text{theorie,} \\ R_5(3/2, 3/2) &= \mathfrak{D}_{3/2, 0} + \mathfrak{D}_{1, 1/2} + \mathfrak{D}_{1/2, 1} + \mathfrak{D}_{0, 3/2} && \text{Bhabha-Gleichung I.} \end{aligned}$$

*Typus D.*

$$(k, l) = (k+1/2, l+1/2) = \dots = (k+n, l+n).$$

Auch hier läßt sich, genau wie oben, zeigen, daß der einzige mit Gl. (34) verträgliche Fall die Gestalt hat:

$$(0, 0) = (1/2, 1/2) = (1, 1) = \dots = (k, k) \quad (\lambda_1 = 2k).$$

Er gehört zur Darstellung  $R_5(\lambda_1, 0)$  und der zugehörige Matrixvektor bestimmt sich zu

$$A^{\lambda \dot{\mu}} = \begin{vmatrix} 0 & v^\lambda(1/2) v^\dot{\mu}(1/2) & 0 \\ -u^\lambda(1/2) u^\dot{\mu}(1/2) & 0 & v^\lambda(1) v^\dot{\mu}(1) \\ 0 & -u^\lambda(1) u^\dot{\mu}(1) & 0 \\ 0 & 0 & -u^\lambda(3/2) u^\dot{\mu}(3/2) \end{vmatrix}$$

Spezielle Vertreter dieses Typus sind:

$$R_5(1, 0) = \mathfrak{D}_{1/2, 1/2} + \mathfrak{D}_{0, 0} \quad \text{skalare Mesonentheorie.}$$

$$R_5(2, 0) = \mathfrak{D}_{1, 1} + \mathfrak{D}_{1/2, 1/2} + \mathfrak{D}_{0, 0}$$

Die Wellengleichung erhält die Gestalt:

$$-p_\beta \dot{\chi} u^\beta(r) u^\dot{\lambda}(r) \psi(r-1/2, r-1/2) + \quad (72) \\ + p_\beta \dot{\chi} v^\beta(r+1/2) v^\dot{\lambda}(r+1/2) \psi(r+1/2, r+1/2) + \chi \psi(r, r) = 0.$$

Wir erwähnen noch zwei weitere gemischte Typen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} E(1/2, 1) = (1, 1/2) & \text{und} & F(0, 1) = (1/2, 1/2) = (1, 0) \\ \parallel & & \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ (0, 1/2) = (1/2, 0) & & (1/2, 3/2) = (1, 1) = (3/2, 1/2) \end{array}$$

Sie gehören zur Darstellung  $R_5(3/2, 1/2)$ , bzw.  $R_5(2, 1)$ .

Ihre Matrixvektoren erhalten die Gestalt:

$$A^{\beta\lambda} = \begin{vmatrix} 0 & d^{1/2} v^{\beta} (1/2) u^{\lambda} (1/2) & a^{1/2} v^{\beta} (1/2) v^{\lambda} (1) & 0 \\ -d^{1/2} u^{\beta} (1/2) v^{\lambda} (1/2) & 0 & 0 & c^{1/2} v^{\beta} (1) v^{\lambda} (1) \\ -a^{1/2} u^{\beta} (1/2) u^{\lambda} (1) & 0 & 0 & b^{1/2} v^{\beta} (1) u^{\lambda} (1) \\ 0 & -c^{1/2} u^{\beta} (1) u^{\lambda} (1/2) & -b^{1/2} u^{\beta} (1) v^{\lambda} (1) & 0 \end{vmatrix}$$

und eine analoge sechsspaltige Matrix.

Dabei folgt aus Gl. (34) noch:

$$a = c = -\frac{5}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad d = -\frac{9}{4}$$

Wenn wir die Wellengleichungen explizite aufstellen wollen, benötigen wir noch die Matrizen  $u$  und  $v$ . Dazu erinnern wir uns an die Gl. (63) und (64) und numerieren Zeilen und Spalten der Matrizen schematisch in der folgenden Art:

$$\begin{aligned} v^{\mu} & \begin{cases} m = k, k-1, \dots, -k \\ m' = k + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}, \dots, -k - \frac{1}{2} \end{cases} & v^{\mu} & \begin{cases} m = l, l-1, \dots, -l \\ m' = l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, \dots, -l - \frac{1}{2} \end{cases} \\ u^{\mu} & \begin{cases} m = k, k-1, \dots, -k \\ m' = k - \frac{1}{2}, k - \frac{3}{2}, \dots, -k + \frac{1}{2} \end{cases} & u^{\mu} & \begin{cases} m = l, l-1, \dots, -l \\ m' = l - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}, \dots, -l - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir die zu den niederen Werten von  $k$  und  $l$  gehörigen  $u$  und  $v$ :

$$\begin{aligned} v^1(1/2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & v^2(1/2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & v^i(1/2) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} & v^{\dot{2}}(1/2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ u^1(1/2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & u^2(1/2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & u^i(1/2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & u^{\dot{2}}(1/2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ v^1(1) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & v^2(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ v^i(1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} & v^{\dot{2}}(1) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ u^1(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} & u^2(1) &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ u^i(1) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & u^{\dot{2}}(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

Daraus lassen sich durch Induktion leicht die Matrizen für beliebiges  $l$  und  $k$  ablesen.

# Materielle und quantenhafte Eigenschaften elektromagnetischer Wellenfelder.

Von

H. W. König, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 2. März 1950.)

## Einleitung.

Man hat versucht, der „Nadelstrahlung“ durch die Benutzung singulärer Lösungen der *Maxwell*-Gleichungen beizukommen. Unter anderen Versuchen wurden zu diesem Zweck die selbstkonjugierten Felder nach *Bateman* [1], [2] herangezogen. Bei diesen stehen die Feldvektoren  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{S}$  aufeinander senkrecht und haben gleichen Absolutwert. Die Geschwindigkeit des Energiestromes stimmt exakt mit der kritischen Geschwindigkeit  $c$  überein. Infolge dieser Eigenschaften nennt man diese Wellen auch „reine elektromagnetische Wellen“. Die ebene Welle stellt den einfachsten Fall eines selbstkonjugierten Feldes dar.

Im Gegensatz zu diesen und ähnlichen Untersuchungen wird in der vorliegenden Arbeit der Versuch gemacht, die Frage der Nadelstrahlung mit Wellenformen zu behandeln, die nicht diesem Typus angehören und entsprechend für die Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht den Wert  $c$  ergeben, die aber die ebene Welle als Grenzfall enthalten und damit beim Grenzübergang auch auf diesen Geschwindigkeitswert führen. Den Überlegungen liegt der Gedanke zugrunde, aus einer geeigneten Lösung der Wellengleichung ein Wellenfeld abzuleiten, das, als zusammenhängendes Ganzes betrachtet, die Welleneigenschaften des Lichtes und der Materie zeigt, dessen energetisch abgeschlossene „Elementarbereiche“ dagegen die Merkmale aufweisen, die uns von den Quanten her bekannt sind. Mit diesen Wellentypen lassen sich energetische Zusammenhänge entwickeln, die aus der für die Lichtausbreitung vorzugsweise benutzten ebenen Welle nicht erkennbar werden, die aber für ein Verständnis des Dualismus Welle—Teilchen im Sinne einer einheitlichen Wellenauffassung neue Gesichtspunkte andeuten. Es wird gezeigt, daß charakteristische Eigenschaften der Mikromaterie sich aus den *inneren* Energieverhältnissen der Elementarbereiche entwickeln lassen.

# 1. Die Spaltung der Energiedichte.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich ausschließlich auf die Ausbreitungsverhältnisse im leeren Raum.

Eine für unsere Zwecke geeignete Lösung der Wellengleichung liefert die Funktion

$$\psi(x, y, z, t) = A \cos \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos \omega \left( \frac{z}{v} - t \right). \quad (1)$$

Für die drei Geschwindigkeiten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v$  gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{v_x^2} + \frac{1}{v_y^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2}. \quad (2)$$

Keine von ihnen kann die kritische Geschwindigkeit  $c$  unterschreiten. Die Größe  $v$  stellt die Phasengeschwindigkeit dar, mit der das Wellenfeld in Richtung der  $Z$ -Achse fortschreitet. Den Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_y$  kann die Frequenzabhängigkeit noch willkürlich vorgeschrieben werden. Dann erst ist durch (2) die Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit  $v$  eindeutig festgelegt. Diese Gleichung enthält das Dispersionsgesetz.

Setzt man beispielsweise

$$v_x = \omega \cdot a_x,$$

$$v_y = \omega \cdot a_y,$$

wobei  $a_x$  und  $a_y$  frequenzunabhängige Konstanten sein sollen, so bekommt man das spezielle Dispersionsgesetz:

$$\frac{1}{a_x^2} + \frac{1}{a_y^2} + \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Für die Gruppengeschwindigkeit  $g$ , welche sich aus

$$\frac{1}{g} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega}{v} \right) \quad (3)$$

berechnet, erhält man

$$g = \frac{c^2}{v}.$$

Das durch

$$\psi(x, y, z, t) = A \cdot \cos \frac{x}{a_x} \cdot \cos \frac{y}{a_y} \cdot \cos \omega \left( \frac{z}{v} - t \right)$$

festgelegte Wellenfeld bildet bekanntlich die Grundlage für die Theorie des idealen Hohlleiters von rechteckigem Querschnitt. Die Konstanten  $a_x$  und  $a_y$  haben die Dimension einer Länge und stehen mit den Abmessungen des Hohlleiters in einem einfachen Zusammenhang, der sich aus der Berücksichtigung



der Grenzbedingungen am Metall ergibt. Die Dispersions-eigenschaften des Hohlleiters kommen dadurch zustande, daß den verschiedenen Frequenzen durch die Konstanten  $a_x$  und  $a_y$  ein und derselbe Querschnitt für die Ausbreitung vorgeschrieben wird.

Im Gegensatz zu diesen Verhältnissen beim Hohlleiter, die hier nicht behandelt werden, lassen wir die Frequenzabhängigkeit der Größen  $v_x$  und  $v_y$  zunächst offen. Auf Grund dessen steht es uns frei, später an geeigneten Stellen zwei Vorschriften noch hinzuzunehmen, die auf die Einführung zweier Konstanten hinauslaufen. Damit wird sich im Laufe der Rechnung das Dispersionsgesetz ganz von selbst ergeben.

Die durch (1) bestimmte Funktion  $\psi$  machen wir zur  $X$ -Komponente des *Hertz*schen Vektors  $\mathfrak{Z}$ , die beiden anderen setzen wir Null:

$$\mathfrak{Z} = (\psi, 0, 0).$$

Gemäß der bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \text{rot rot } \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\end{aligned}$$

leitet man aus  $\mathfrak{Z}$  das folgende Wellenfeld ab:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \omega^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot A \cdot \cos \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos \omega \left( \frac{z}{v} - t \right), \\ E_y &= \frac{\omega^2}{v_x v_y} \cdot A \cdot \sin \frac{\omega x}{v_x} \cdot \sin \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos \omega \left( \frac{z}{v} - t \right), \\ E_z &= \frac{\omega^2}{v_x v} \cdot A \cdot \sin \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos \frac{\omega y}{v_y} \cdot \sin \omega \left( \frac{z}{v} - t \right), \\ H_x &= 0, \\ H_y &= \frac{\omega^2}{c v} \cdot A \cdot \cos \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos \omega \left( \frac{z}{v} - t \right), \\ H_z &= \frac{\omega^2}{c v_y} \cdot A \cdot \cos \frac{\omega x}{v_x} \cdot \sin \frac{\omega y}{v_y} \cdot \sin \omega \left( \frac{z}{v} - t \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Setzt man

$$\frac{1}{v_x} = \frac{1}{v_y} = 0,$$

so ergibt sich als Spezialfall die ebene, linearpolarisierte Welle

$$E_x = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot A \cdot \cos \omega \left( \frac{z}{c} - t \right),$$

$$H_y = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot A \cdot \cos \omega \left( \frac{z}{c} - t \right).$$

Die Phasengeschwindigkeit  $v$  erreicht hier nach (2) ihren kleinstmöglichen Wert  $c$ .

In der allgemeinen Lösung nach (4) führen wir für die Geschwindigkeiten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v$  die Wellenlängen  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  und  $\lambda$  ein. Die zu  $c$  gehörige Wellenlänge bezeichnen wir mit  $\lambda_c$ . Wir setzen also:

$$\lambda_x = \frac{2\pi v_x}{\omega}, \quad \lambda_y = \frac{2\pi v_y}{\omega}, \quad \lambda = \frac{2\pi v}{\omega}, \quad \lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (5)$$

Aus (2) wird dann:

$$\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2}. \quad (6)$$

Bei der ebenen Welle wird  $\lambda_x = \lambda_y = \infty$  und daher  $\lambda = \lambda_c$ . Im allgemeinen Fall hingegen ist  $\lambda > \lambda_c$ . Man muß daher berücksichtigen, daß die in Fortpflanzungsrichtung gemessene Wellenlänge  $\lambda$  nicht mit  $\lambda_c$  übereinstimmt und daher auch nicht aus der Beziehung

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega}$$

unmittelbar auf die Frequenz geschlossen werden kann. Erst wenn das Dispersionsgesetz festliegt, kann von  $\lambda$  auf  $\omega$  geschlossen werden.

Die Periodizität des Wellenfeldes (4) ist durch  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  und  $\lambda$  gegeben. An allen Punkten, die sich in ihren Koordinaten um  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda$  voneinander unterscheiden, liegen im gleichen Zeitpunkt identische Verhältnisse vor. Man könnte daher alle Untersuchungen auf einen quaderförmigen Bereich dieser Dimensionen beschränken. Für die Feststellung der energetischen Zusammenhänge ist es indessen zweckmäßiger, den Bereich erheblich kleiner zu wählen. Um das geeignete Gebiet ausfindig zu machen, untersuchen wir zunächst die Eigenschaften des *Poyntingschen* Vektors  $\mathcal{S}$ .

Aus (4) findet man für seine Komponenten:

$$S_x \sim \sin \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos \frac{\omega x}{v_x},$$

$$S_y \sim \sin \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos \frac{\omega y}{v_y},$$

$$S_z \sim \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right).$$

An den durch die Gleichungen

$$\cos \frac{\omega x}{v_x} = 0,$$

$$\cos \frac{\omega y}{v_y} = 0,$$

$$\cos \omega \left( \frac{z}{v} - t \right) = 0$$

gegebenen Ebenen verschwindet die Normalkomponente des Energiestromes. Nach (1) verschwindet an diesen Ebenen auch die Funktion  $\psi$ . Da nun die reinen zweiten Ableitungen von  $\psi$  nach  $x, y, z$  und  $t$  bis auf konstante Faktoren mit  $\psi$  übereinstimmen, gilt an diesen Ebenen:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Da die Stellen, an denen die reinen zweiten Ableitungen verschwinden, für unsere späteren Betrachtungen eine wichtige Rolle spielen, nennen wir diese Ebenen „Hauptebenen“. Sie zerlegen das Wellenfeld in abgeschlossene Bereiche, die miteinander in keinem Energieaustausch stehen. Einen solchen Bezirk, der von Hauptebenen begrenzt wird und keine Hauptebene in seinem Inneren enthält, nennen wir ein „Phasenteilchen“. Dieses stellt offenbar den kleinsten abgeschlossenen Bereich dar, an dessen Grenzflächen die reinen zweiten Ableitungen verschwinden. Das Phasenteilchen hat die Abmessungen  $\frac{1}{2} \lambda_x, \frac{1}{2} \lambda_y$  und  $\frac{1}{2} \lambda$ .

Die Normalkomponente des Energiestromes wird außerdem noch an den durch die Gleichungen

$$\sin \frac{\omega x}{v_x} = 0,$$

$$\sin \frac{\omega y}{v_y} = 0$$

bestimmten Ebenen zu Null. Diese „Nebenebenen“ zerlegen jedes Phasenteilchen wieder in vier energetisch abgeschlossene Bezirke, die wir „Phasenelemente“ nennen. Dies sind offenbar die kleinsten energetisch abgeschlossenen Bereiche überhaupt. An ihren Grenzflächen ist aber nicht überall (7) erfüllt.

Infolge der an den Hauptebenen herrschenden besonderen Verhältnisse untersuchen wir das Phasenteilchen. Obwohl die Phasenteilchen wegen des verschiedenen Richtungssinnes der

Feldstärken untereinander nicht vollkommen gleichwertig sind, kann man sie in energetischer Hinsicht als in jeder Hinsicht äquivalent ansehen. Das liegt an dem quadratischen Charakter der Energiebeziehungen. Wir können daher ein beliebiges Phasenteilchen herausgreifen. Es sei begrenzt durch die Hauptebenen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \frac{1}{4} \lambda_x, \\ y &= \pm \frac{1}{4} \lambda_y, \\ z - vt &= \pm \frac{1}{4} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir berechnen zunächst die Energiedichte unseres Feldes. Aus den Feldkomponenten nach (4) erkennt man, daß die Energiedichte aus zwei Anteilen besteht, die in ihrem zeitlichen Verlauf ein gegensinniges Verhalten zeigen. Der eine Anteil  $w$  ist proportional  $\cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right)$ , der zweite — wir bezeichnen ihn mit  $w_s$  — ist proportional  $\sin^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right)$ . Man erhält:

$$\begin{aligned} 8\pi w &= E_x^2 + E_y^2 + H^2 + H_y^2 = \\ &= \omega^4 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right)^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right) + \\ &+ \frac{\omega^4}{c^2 v^2} \cdot A^2 \cdot \cos^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right) + \\ &+ \frac{\omega^4}{v_x^2 v_y^2} \cdot A^2 \cdot \sin^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot \sin^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 8\pi w_s &= E_z^2 + H_z^2 = \\ &= \frac{\omega^4}{v_x^2 v^2} \cdot A^2 \cdot \sin^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot \sin^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right) + \\ &+ \frac{\omega^4}{c^2 v_y^2} \cdot A^2 \cdot \cos^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot \sin^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot \sin^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Die Energiedichten

$$w \sim \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right)$$

und

$$w_s \sim \sin^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right)$$

ändern sich an einer bestimmten Stelle des Raumes im Laufe der Zeit periodisch, u. zw. so, daß die eine ansteigt, wenn die andere fällt. Dieser



Sachverhalt legt den Gedanken nahe, daß der hier vorgenommenen Spaltung der Energiedichte in  $w$  und  $w_s$  nicht nur eine formale Bedeutung zukommt, sondern daß ihr auch ein physikalischer Sinn innewohnt. Eine solche Möglichkeit wird durch die folgende Überlegung noch wahrscheinlicher gemacht. Man sieht nämlich aus Gleichung (10), daß  $w_s$  für die ebene Welle mit  $v_x = v_y = \infty$  verschwindet. Bei der ebenen Welle erfolgt der Energiestrom in jedem Zeitpunkt nur in Richtung der  $Z$ -Achse. Die seitlichen Komponenten  $S_x$  und  $S_y$  sind Null. Im allgemeinen Fall hingegen ist  $w_s \neq 0$  und der Energiestrom hat auch von Null verschiedene Querkomponenten. Diese verschwinden aber an den seitlichen Hauptebenen des Phasenteilchens. Der quergerichtete Energiestrom wird an diesen Wänden reflektiert. Dieser Anteil des Energiestromes scheint also in einem gewissen Zusammenhang mit der Energiedichte  $w_s$  zu stehen. Es ist daher naheliegend, sich die Dichte  $w_s$  senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle schwingend vorzustellen. Dann liefert sie aber für das Zustandekommen des axial gerichteten Energiestromes  $S_z$  keinen unmittelbaren Beitrag. Andererseits ändert sich  $w_s$  an einer bestimmten Stelle im Laufe einer halben Periode vom Wert Null über einen Maximalwert wieder bis auf Null. Das kann dadurch eintreten, daß sich  $w_s$  in die Energieform  $w$  umwandelt, welche die axiale Strömung  $S_z$  hervorruft. Ebenso muß der umgekehrte Umwandlungsvorgang im anderen Teil der Halbperiode vor sich gehen. In dieser Weise läßt sich die Spaltung der Energiedichte physikalisch plausibel machen. Eine schärfere Begründung für eine derartige Spaltung kann sich indessen nur aus den abgeleiteten Folgerungen ergeben. Zunächst läßt sich hierzu noch folgendes bemerken: Die *Maxwellsche* Theorie lehrt die Berechnung des Energiestromes und der Energiedichte. Sie enthält aber keine Vorschrift über die Geschwindigkeit, mit der die Energie strömt. Wohl macht man in manchen Fällen den Ansatz, daß das Produkt aus der gesamten Energiedichte  $w + w_s$  und der Energiegeschwindigkeit  $u$  gleich dem Energiestrom sein soll:

$$(w + w_s)u = \mathcal{E}. \quad (11)$$

Dieser Ansatz enthält aber eine gewisse Willkür, indem er von der Annahme ausgeht, daß die gesamte Energiedichte eine gleichartige Bewegung vollführt. Zur näheren Orientierung über diese Frage sei auf die unter [2] zitierten Ausführungen hingewiesen. Bei den selbstkonjugierten Feldern mit ihren einfachen Energieverhältnissen scheint außer dem Ansatz (11) keine andere Möglichkeit zu bestehen, und man findet für diese Felder

$$u = c.$$

Dort sind die Verhältnisse damit eindeutig festgelegt. Für die von uns benutzten Felder hingegen bestehen von seiten der *Maxwellschen* Theorie keine festen Vorschriften für die Strömungsgeschwindigkeit der Energie. Es steht uns somit im Rahmen der *Maxwellschen* Theorie noch frei, den Energiedichten  $w$  und  $w_s$  verschiedenartige Bewegungen zuzuschreiben.

Nachdem die Spaltung hinreichend begründet ist, gehen wir über zu den Folgerungen, die sich daraus ergeben. Wir ermitteln die Energien  $W$  und  $W_s$ , die in einem Phasenteilchen enthalten sind:

$$W = \iiint w \, dx \, dy \, dz,$$

$$W_s = \iiint w_s \, dx \, dy \, dz.$$

Die Integrationsgrenzen sind durch (8) festgelegt. In der Rechnung treten folgende Integrale auf:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1/4 \lambda_x}^{+1/4 \lambda_x} \sin^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot dx = \int_{-1/4 \lambda_x}^{+1/4 \lambda_x} \cos^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v_x}{\omega} = \frac{1}{4} \lambda_x, \\
& \int_{-1/4 \lambda_y}^{+1/4 \lambda_y} \sin^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot dy = \int_{-1/4 \lambda_y}^{+1/4 \lambda_y} \cos^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot dy = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v_y}{\omega} = \frac{1}{4} \lambda_y, \\
& \int_{vt - 1/4 \lambda}^{vt + 1/4 \lambda} \sin^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right) dz = \int_{vt - 1/4 \lambda}^{vt + 1/4 \lambda} \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right) dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v}{\omega} = \frac{1}{4} \lambda.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$8\pi W = \omega \cdot A^2 \cdot \frac{\pi^3}{8} \cdot v_x v_y v \left[ \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right)^2 + \frac{1}{c^2 v^2} + \frac{1}{v_y^2 v_x^2} \right].$$

Der Term in der eckigen Klammer läßt sich unter Benutzung von (2) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right)^2 + \frac{1}{c^2 v^2} + \frac{1}{v_x^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) = \\
& = \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right)^2 + \frac{1}{v_x^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) + \frac{1}{v^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) = \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{v^2} \right)
\end{aligned}$$

Mit  $\omega = 2\pi v$  bekommt man schließlich:

$$W = A^2 \cdot \frac{\pi^3}{32} \cdot v_x v_y v \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{v^2} \right) \cdot v. \quad (12)$$

Für den Energieanteil  $W_s$  findet man:

$$8\pi W_s = \omega A^2 \cdot \frac{\pi^3}{8} \cdot v_x v_y v \cdot \left( \frac{1}{v_x^2 v^2} + \frac{1}{c^2 v_y^2} \right).$$

Der Klammerausdruck ergibt mit (2):

$$\frac{1}{v_x^2 v^2} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) = \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right).$$

Somit wird:

$$W_s = A^2 \cdot \frac{\pi^3}{32} \cdot v_x v_y v \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right) \cdot v. \quad (13)$$

Für das Verhältnis beider Energiebeträge erhält man:

$$\frac{W}{W_s} = \frac{v^2/c^2 + 1}{v^2/c^2 - 1}. \quad (14)$$

Die totale Energie eines Phasenteilchens ist:

$$W + W_s = A^2 \cdot \frac{\pi^3}{16} \cdot v_x v_y v \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot \frac{v}{c^2}. \quad (15)$$

Es fällt auf, daß die Energien  $W$  und  $W_s$  proportional  $v$  sind. Dies geht darauf zurück, daß wir das Dispersionsgesetz noch offengelassen haben und  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v$  zunächst auch als von  $v$  ganz unabhängig ansehen können.

## 2. Strömungsverhältnisse der Energie.

Wir berechnen die Energie, welche in der Sekunde durch den von einem Phasenteilchen bestimmten Querschnitt hindurchströmt. Aus (4) erhält man:

$$\frac{4\pi}{c} \cdot S_z = \frac{\omega^4}{c v} \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot A^2 \cdot \cos^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos^2 \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right). \quad (16)$$

Für den zeitlichen Mittelwert ergibt sich:

$$\frac{4\pi}{c} \cdot S_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^4}{c v} \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot A^2 \cdot \cos^2 \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos^2 \frac{\omega y}{v_y}. \quad (17)$$

Durch den ruhenden Teilchenquerschnitt geht die Leistung

$$N = \int \int S_z dx dy$$

oder ausgerechnet:

$$N = A^2 \cdot \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{v_x v_y}{v} \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot v^2. \quad (18)$$

Die Kombination mit (15) liefert

$$N = 2 v (W + W_s) \cdot \frac{c^2}{v^2} = \frac{2}{v} \cdot (W + W_s) \cdot \frac{c^2}{v}, \quad (19)$$

also wird:

$$N = \frac{2}{v} \cdot (W + W_s) \cdot \frac{c^2}{v}.$$

Hieraus entnimmt man die erste Deutungsmöglichkeit für die Geschwindigkeit, mit der die Energie strömt. Da in (19) nur die Summe von  $W$  und  $W_s$  vorkommt, ist für dieses Ergebnis die Energiespaltung noch ohne Bedeutung. Die Länge des Phasenteilchens ist  $\frac{1}{2} \lambda$ , also stellt der Ausdruck

$$\frac{2}{\lambda} (W + W_s)$$

den auf die Längeneinheit bezogenen Energieinhalt dar, Gl. (19) liefert die Deutung, daß die „Totalenergie“  $W + W_s$  mit der Geschwindigkeit

$$s = \frac{c^2}{v} \quad (20)$$

strömt. Wegen  $v < c$  gilt  $s < c$ . Gl. (20) erinnert an die Gruppengeschwindigkeit, wenn das Dispersionsgesetz die spezielle Form

$$\frac{1}{a_x^2} + \frac{1}{a_y^2} + \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

hat. Da unser Dispersionsgesetz aber noch nicht festliegt, ist  $s$  nicht die Gruppengeschwindigkeit.

Wir kommen nun zu der zweiten Deutungsmöglichkeit, welche direkt der an früherer Stelle vorgebrachten Begründung für die Energiespaltung entspricht. Wir benutzen den aus (12) und (13) folgenden Zusammenhang

$$(W + W_s) \cdot \frac{c^2}{v} = (W - W_s) \cdot v$$

zur Umformung von (19). Es wird

$$N = \frac{2}{\lambda} \cdot (W - W_s) \cdot v. \quad (21)$$

Nach unserem früheren Hinweis stellen wir uns vor, daß die Energiedichte  $w_s$  senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung Schwingungen vollführt und nur durch Umwandlung in die Energieform  $w$  ihren Platz verändern kann. In dieser Deutung ist also Gl. (21) so umzuformen, daß auf der rechten Seite das Produkt aus  $W$  und einer Geschwindigkeit erscheint. Dann bekommt man aus

$$N = \frac{2}{\lambda} (W - W_s) v = \frac{2}{\lambda} \cdot W \left(1 - \frac{W_s}{W}\right) \cdot v$$

mit (14):

$$N = \frac{2}{\lambda} \cdot W \cdot \frac{2v}{1 + v^2/c^2}. \quad (22)$$

In dieser Auffassung bewegt sich nur der Anteil  $W$  der Totalenergie  $W + W_s$  mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}, \quad (23)$$

während die „Schwingungsenergie“  $W_s$  senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung hin und her pendelt. Im Gegensatz zu  $W_s$  nennen wir  $W$  die „Strömungsenergie“ und  $u$  die „Energiegeschwindigkeit“.

Wir zeigen noch, daß sich die Energiegeschwindigkeit  $u$  auch ohne zeitliche Mittelwertbildung gewinnen läßt. Zu diesem Zweck mitteln wir die Energiedichte  $w$  und die Komponente des Strahlvektors  $S_z$  über den Querschnitt des Phasenteilchens. Diese Mittelwerte seien durch einen hinzugefügten Strich gekennzeichnet. Aus (9) und (16) findet man:

$$w' = \frac{\omega^4}{16 \pi} \cdot A^2 \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{v^2} \right) \cdot \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right),$$
$$S'_z = \frac{\omega^4}{16 \pi} \cdot A^2 \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot \frac{1}{v} \cdot \cos^2 \omega \left( \frac{z}{v} - t \right).$$

Setzt man diese von  $z$  und  $t$  abhängigen Größen mit der gesuchten Energiegeschwindigkeit  $u$  in die Beziehung

$$w' u = S'_z,$$

so kommt man wieder auf Gl. (23).

Später benötigen wir noch den elektromagnetischen Impuls, der einem Phasenteilchen innewohnt. Er ist nach der *Maxwellschen* Theorie bestimmt durch

$$c^2 \mathfrak{G} = \int \int \int \mathfrak{S} \, dx \, dy \, dz.$$

Für seine  $Z$ -Komponente bekommt man durch Integration von (16):

$$G = A^2 \cdot \frac{\pi^3}{16} \cdot v_x v_y \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot \frac{v}{c^2}. \tag{24}$$

Nach unserer zweiten Deutung strömt die Energie mit der Geschwindigkeit  $u \cdot v$ , das energetisch abgeschlossene Phasenteilchen aber bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit  $v$ . Aus dem Dispersionsgesetz wird sich später die Identität der Energiegeschwindigkeit  $u$  mit der Gruppengeschwindigkeit  $g$  ergeben.

### 3. Energie, Impuls und Masse.

Unsere weiteren Überlegungen beziehen sich ausschließlich auf die zweite Deutungsmöglichkeit. Wir führen nun in (14) an Stelle der Phasengeschwindigkeit  $v$  die Energiegeschwindigkeit  $u$  ein. Die Auflösung von (23) nach  $v$  ergibt:

$$\frac{v}{c} = \frac{c}{u} (1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}). \tag{25}$$

Hierbei ist zu beachten, daß wegen  $v \cdot c$  und  $u \cdot c$  der Quadratwurzel das positive Vorzeichen zu erteilen ist. Aus (25) folgt weiter:

$$v^2 \cdot c^2 + 1 = 2 \cdot \frac{c^2}{u^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}),$$
$$v^2/c^2 - 1 = 2 \cdot \frac{c^2}{u^2} \cdot (1 - u^2/c^2 + \sqrt{1 - u^2/c^2}) =$$
$$= 2 \cdot \frac{c^2}{u^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}) \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$



Man bekommt somit für das Energieverhältnis

$$\frac{W}{W_s} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

oder

$$W = \frac{W_s}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (26)$$

Zwischen dem Impuls  $G$  und der Energiegeschwindigkeit  $u$  läßt sich durch Benutzung des Massebegriffes noch die Beziehung

$$G = m u \quad (27)$$

eingeführen. Gl. (12) läßt sich folgendermaßen umformen:

$$W = A^2 \cdot \frac{\pi^3}{16} \cdot v_x v_y \cdot \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \cdot v \cdot \frac{1}{2v} \left( 1 + v^2/c^2 \right).$$

Mit (23), (24) und (27) wird daraus:

$$W = \frac{c^2}{u} G$$

oder

$$W = m c^2. \quad (28)$$

Aus (26) folgt für  $u = 0$ :

$$W_0 = W_{s0}.$$

Der Ruhewert der Strömungsenergie ist also gleich dem Ruhewert der Schwingungsenergie. Bezeichnet man den Ruhewert von  $m$  mit  $m_0$ , so wird:

$$W_0 = W_{s0} = m_0 c^2. \quad (29)$$

Die Energien  $W$  und  $W_s$  sind nach (12) und (13) von den Geschwindigkeiten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v$  abhängig. Infolge des zu Beginn nicht festgelegten Dispersionsgesetzes können wir hier eine Vorschrift willkürlich einführen. Wir verlangen, daß  $W_s$  von den Geschwindigkeiten vollständig unabhängig sein soll. Wegen (29) muß dann

$$W_s = m_0 c^2 = W_0 \quad (30)$$

sein.

Mit (30) ergibt sich aus (26) und (28):

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (31)$$

und

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (32)$$

Für den Impuls findet man

$$G = m u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (33)$$

Der durch die Geschwindigkeit bedingte Überschuß von  $W$  gegenüber  $W_0$  ist nach (31):

$$W - W_0 = W_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right). \quad (34)$$

Diese Energiedifferenz wird man wohl als kinetische Energie aufzufassen haben:

$$W_k = W - W_0 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right). \quad (35)$$

Die hier aus den *Phasenverhältnissen* für die *Masse*  $m$  und die *Energiegeschwindigkeit*  $u$  gezogenen Folgerungen stehen im Einklang mit den entsprechenden Zusammenhängen der speziellen Relativitätstheorie. Man muß nur den Unterschied zwischen der mit der Geschwindigkeit  $u$  strömenden *Masse* und dem mit der Geschwindigkeit  $v$  fortschreitenden *Phasenteilchen* beachten. Die Totalenergie der *Masse* ist  $W = W_k + W_0$ , die Totalenergie des *Phasenteilchens* hingegen ist  $W + W_0 = W_k + 2W_0$ .

#### 4. Quanteneigenschaften. Dispersionsgesetz.

Es sind uns zwei Tatsachen begegnet, welche auf quantenmäßige Eigenschaften unseres Wellenfeldes hinweisen. Als eine von ihnen kann man den Umstand ansehen, daß das Feld sich in energetisch abgeschlossene Elemente zergliedert, die einer weiteren Unterteilung nicht mehr fähig sind. Die zweite Tatsache betrifft die besondere Struktur der Energien  $W$  und  $W_s$ , die der Frequenz  $\nu$  proportional sind.

Die Einführung des elementaren Wirkungsquantums gelingt über die Gl. (12) und (13), die sich in abgekürzter Form folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} W &= Q(A, v_x, v_y, v) \cdot \nu, \\ W_s &= Q_s(A, v_x, v_y, v) \cdot \nu. \end{aligned} \quad (36)$$

Mit Benutzung von (24) ergibt sich:

$$\begin{aligned} W &= Q \cdot \nu = \frac{1}{2} (1 + c^2/v^2) \cdot G \cdot v, \\ W_s &= Q_s \cdot \nu = \frac{1}{2} (1 - c^2/v^2) \cdot G \cdot v. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(Q + Q_s) \cdot \nu = G \cdot \nu$$

oder

$$\lambda = \frac{Q + Q_s}{G} \cdot \nu. \quad (37)$$

Wir stellen nun das folgende Gedankenexperiment an: Das Wellenfeld werde in allen seinen linearen Abmessungen um den Faktor  $\frac{1}{k}$  zusammengedrückt. Hierbei ist Arbeit gegen den Lichtdruck zu leisten. Es ändert sich also der totale Energieinhalt  $W + W_s$  und die Frequenz  $\nu$  nach Maßgabe der aufgewendeten Arbeit. Die obige Gleichung geht über in

$$W' + W'_s = (Q' + Q'_s) \cdot \nu.$$

Nach den Ähnlichkeitsgesetzen des elektromagnetischen Feldes gilt dann, ohne daß eine zusätzliche Annahme erforderlich wäre:

$$W' + W'_s = k (W + W_s),$$

$$\nu' = k \cdot \nu.$$

Daraus folgt

$$Q + Q_s = Q' + Q'_s = \text{const.}$$

Bei dem vorgenommenen Prozeß bleibt die Summe  $Q + Q_s$  unverändert. Wenn man die Wellenfelder verschiedener Frequenzen in dieser Weise als aufeinander zurückführbar ansieht — eventuell durch Zwischenschaltung einer Wellentransformation —, dann ist die Summe der Funktionen  $Q$  und  $Q_s$  als eine Konstante zu betrachten:

$$Q + Q_s = h. \quad (38)$$

Wir identifizieren sie mit dem *Planckschen* Wirkungsquantum

$$h = 6,63 \cdot 10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

Damit wird der Totalenergie des Phasenteilchens der Energiebetrag  $h \nu$  zugeschrieben:

$$W + W_s = h \cdot \nu. \quad (39)$$

Man könnte die Energien  $h \nu$ ,  $mc^2$  und  $m_0 c^2$  auch auf ein Phasenelement oder mehrere Phasenteilchen beziehen. Die entscheidenden Zusammenhänge würden sich dadurch nicht ändern.

Durch Einführung des Wirkungsquantums ergibt sich aus (37) und (39) zusammen mit (30):

$$\lambda = \frac{h}{G} = \frac{h}{m u}. \quad (40)$$

Aus den vor (37) angeschriebenen beiden Gleichungen für  $Q$  und  $Q_s$  ergibt sich mit (30) und (40):

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{h\nu}{\lambda} \cdot (1 + c^2/v^2),$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h\nu}{\lambda} \cdot (1 - c^2/v^2).$$

Mit

$$\frac{\lambda}{v} = \frac{1}{v}, \quad \frac{c}{v} = \frac{\lambda_c}{\lambda},$$

und durch Einführung der Massen  $m$  und  $m_0$  an Stelle von  $W$  und  $W_0$  bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h\nu}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}\right), \\ m_0 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h\nu}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Für den Impuls ergibt sich aus (40):

$$G = \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda}. \quad (42)$$

Diese Gleichungen zeigen die Problematik, welche dem Begriff der ebenen Welle anhaftet. Für diesen Grenzfall wird  $\lambda = \lambda_c$  und man erhält die bekannten Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{h\nu}{c^2}, \\ m_0 &= 0, \\ G &= \frac{h\nu}{c}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

welche die *Einsteinsche* Lichtquantenhypothese enthalten. Die unbefriedigende Tatsache, daß man dem Photon die Ruhmasse Null zuschreiben muß, hängt nach (41) damit zusammen, daß für  $\lambda = \lambda_c$  der Energieinhalt des Phasenteilchens über den unbegrenzten Querschnitt der ebenen Welle verstreut ist.

Durch die Einführung der beiden Konstanten  $m_0$  und  $h$  ist nun das am Anfang offengelassene Dispersionsgesetz festgelegt. Die zweite Gleichung von (41) enthält diese Beziehung zwischen  $v$  und  $\nu$ :

$$\frac{2 m_0 c^2}{h} = \nu (1 - c^2/v^2). \quad (44)$$

Hieraus berechnet man mit (3) für die Gruppengeschwindigkeit:

$$g = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}.$$

Nach (23) ist also die Energiegeschwindigkeit identisch mit der Gruppengeschwindigkeit:

$$g = u. \quad (45)$$

Infolge des anderen Dispersionsgesetzes gegenüber dem Hohlleiter, bei welchem

$$gv = c^2$$

gilt, haben wir hier nach (25):

$$gv = c^2(1 + \sqrt{1 - g^2/c^2}). \quad (46)$$

Gl. (40) ist mit der von *De Broglie* benutzten Beziehung identisch und einer experimentellen Prüfung zugänglich. Gl. (46) hingegen weicht von dem entsprechenden Zusammenhang bei den Materiewellen ab, für welche die Beziehung

$$gv = c^2$$

gilt. Da die Phasengeschwindigkeit einer direkten experimentellen Bestimmung unzugänglich ist, lassen sich hieraus keine weiteren Schlüsse ziehen. Die Abweichung im Zusammenhang zwischen  $g$  und  $v$  rührt daher, daß bei uns

$$h\nu = W_k + 2W_0$$

gilt. In der unrelativistischen Theorie von *Schrödinger* setzt man bei kräftefreier Bewegung des Massenpunktes

$$h\nu = W_k.$$

Die relativistische *Diracsche* Theorie hingegen benutzt den Ansatz

$$h\nu = W_k + W_0.$$

Man vergleiche hierzu die eingehenden Erörterungen bei *Sommerfeld* [3].

Aus dem Dispersionsgesetz (44) findet man mit (2):

$$\frac{2m_0}{h} = v \left( \frac{1}{v_x^2} + \frac{1}{v_y^2} \right).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit (44) und führt für  $v_x$  und  $v_y$  die Größen  $\lambda_x$  und  $\lambda_y$  ein, so bekommt man:

$$\frac{4m_0^2 c^2}{h^2} = \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}\right). \quad (47)$$

Für ein bestimmtes  $m_0 \neq 0$  und festes  $v$  ergibt sich aus dem Dispersionsgesetz ein ganz bestimmter Wert von  $v$  und  $\lambda$ . Die Länge des Phasenteilchens ist damit eindeutig festgelegt. Hin- gegen sind die Querabmessungen  $\frac{1}{2}\lambda_x$  und  $\frac{1}{2}\lambda_y$  nicht eindeutig



bestimmbar. Der Querschnitt kann in einer Richtung noch bis ins Unendliche reichen, es kann entweder  $\lambda_x = \infty$  oder  $\lambda_y = \infty$  sein. Aber der Fall  $\lambda_x = \lambda_y = \infty$  kann wegen  $m_0 \neq 0$  nicht eintreten. Den kleinsten Querschnitt bekommt man für  $\lambda_x = \lambda_y$ . Führt man in (47) für  $c^2 v^2$  mit (14) die Energien  $W$  und  $W_0 = m_0 c^2$  ein und berücksichtigt den für die kinetische Energie geltenden Zusammenhang  $W_k = W - W_0$ , so ergibt sich bei quadratischem Querschnitt:

$$\frac{\lambda_x}{2} = \frac{\lambda_y}{2} = \frac{h}{2\sqrt{2} m_0 c} \cdot \sqrt{\frac{2m_0 c^2}{2m_0 c^2 + W_k}}. \quad (48)$$

Für  $W_k \gg 2m_0 c^2$  ist der Querschnitt von der Energie praktisch unabhängig, erst für die Werte oberhalb von  $2m_0 c^2$  nimmt er ab. Setzt man für  $m_0$  beispielsweise die Masse des Mesons<sup>1)</sup> ein, so wird:

$$2m_0 c^2 \approx 2 \cdot 10^8 \text{ eV}, \quad \frac{h}{2\sqrt{2} m_0 c} \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Man kommt hier auf einen Durchmesser von  $4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ , der etwa der Reichweite der Kernkräfte entspricht. Überschreitet die Energie den kritischen Wert von etwa  $2 \cdot 10^8 \text{ eV}$ , so nimmt der Durchmesser ab.

Auf Grund dieser und ähnlicher Abschätzungen wird die Frage nahegelegt, ob Möglichkeiten bestehen, um aus dem seitlich unendlich ausgedehnten Wellenfeld ein Feld vom Querschnitt eines Phasenteilchens oder eines Phasenelementes zu gewinnen. Einen solchen Teilbereich des Feldes wollen wir eine „Kette“ nennen.

## 5. Die seitlichen Begrenzungsmöglichkeiten des Wellenfeldes. Kettenhypothese.

An der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Substanzen weisen die Feldkomponenten, bzw. deren Ableitungen Unstetigkeiten auf. Nur die Normalkomponente von  $\mathcal{E}$  und die Tangentialkomponenten von  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{H}$  sind stetig. Die Unstetigkeit der übrigen Komponenten ist eine Folge der Sprünge, welche die Materialkonstanten an der Grenzfläche erleiden. Diese Unstetigkeiten lassen sich beheben, wenn man die sprunghafte Änderung der Materialkonstanten durch einen kontinuierlichen Übergang ersetzt. Nach Beseitigung der materiellen Unstetigkeiten läßt sich das Feld aus einer stetig differentiierbaren Lösung der Telegraphengleichung ableiten.

Im Gegensatz zu diesen Verhältnissen hat man an der Wellenfront einer ebenen Welle im Vakuum Unstetigkeiten, die

<sup>1)</sup> Hier ist der 200fache Wert der Elektronenmasse angenommen.

sich nicht beheben lassen, weil sie in der Natur des Vorganges selbst begründet sind. An der Front stoßen zwei Lösungen der Wellengleichung aneinander: die Lösung  $\psi = A \cos \omega \left( \frac{z}{c} - t \right)$  und die Lösung  $\psi = 0$ . Im allgemeinen treten hier Sprünge der reinen zweiten Ableitungen von  $\psi$  auf und Sprünge in den Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{S}$  ([2], S. 103 f.). Sie sind nur deshalb zulässig, weil die mit der Geschwindigkeit  $c$  fortschreitende Unstetigkeitsfläche eine *Charakteristik* der Wellengleichung und der *Maxwell*-Gleichungen ist. Die zusammengesetzte Lösung ist an der Wellenfront nicht zweimal stetig differenzierbar. Sie läßt sich auch mittels des Superpositionsverfahrens aus Partikulärlösungen der Wellengleichung aufbauen. An der Wellenfront selbst hingegen werden, infolge der dort nicht bestehenden Gleichmäßigkeit der Konvergenz, nur die Mittelwerte aus den beiderseitigen Funktionswerten geliefert.

Unterstellt man auch für die hier behandelten *Mikrovorgänge* die physikalische Zulässigkeit nicht stetig differenzierbarer Lösungen, so lassen sich daraus folgende Schlüsse ziehen. An den seitlichen Hauptebenen verschwinden nach (7) die reinen zweiten Ableitungen der Funktion  $\psi$ . Setzt man diese Lösung außerhalb der Kette durch die Lösung  $\psi = 0$  fort, so kommt man auf die zusammengesetzte Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = A \cos \frac{\omega x}{v_x} \cos \frac{\omega y}{v_y} \cos \omega \left( \frac{z}{v} - t \right) \\ \text{für} \quad \left| \frac{\omega x}{v_x} \right| \leq \frac{\pi}{2}, \quad \left| \frac{\omega y}{v_y} \right| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \psi = 0 \\ \text{für} \quad \left| \frac{\omega x}{v_x} \right| > \frac{\pi}{2}, \quad \left| \frac{\omega y}{v_y} \right| > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right\} \quad (49)$$

Hier ist die Wellengleichung *an den Unstetigkeitsflächen selbst erfüllt*. Denn beim Durchgang durch die Hauptebenen treten keine Sprünge in den reinen zweiten Ableitungen auf. Diese haben auf beiden Seiten der Flächen gleiche Werte, sind also auf ihnen eindeutig definiert und erfüllen die Wellengleichung. Die Funktion (49) ist eine nicht zweimal stetig differenzierbare Lösung der Wellengleichung. Hingegen treten Sprünge in den gemischten zweiten Ableitungen auf, die Unstetigkeiten in den Feldkomponenten und deren Ableitungen zur Folge haben. Aus (4) sieht man, daß Unstetigkeiten der Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}$ , bzw.  $\mathfrak{S}$  vorliegen, ähnlich wie an der Wellenfront einer ebenen Welle. Das ist aber nur an *Charakteristiken* zulässig. Nun

gehört die charakteristische Mannigfaltigkeit  $\chi(x, y, z, t) = 0$  der Maxwell-Gleichungen ([4], S. 143) der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 \right\} = 0.$$

Die seitlichen Hauptebenen bringen den ersten Faktor zum Verschwinden und sind also Charakteristiken. Die Sprünge sind damit gerechtfertigt. Obwohl *jede ruhende Fläche* eine Charakteristik der Maxwell-Gleichungen darstellt, besteht an einer beliebigen solchen Fläche nicht die Möglichkeit für eine störungsfreie Zerschneidung. Denn ein Schnitt, der nicht entlang einer Hauptebene oder einer Nebenebene geführt wird, würde den Energiestrom des Wellenfeldes stören und damit ein Zerfließen (Beugung) zur Folge haben. Sieht man außerdem das Bestehen der Wellengleichung an den Unstetigkeitsflächen als wesentlich an, dann scheiden auch die Nebenebenen für eine störungsfreie Zerschneidung aus. Denn *an* ihnen ist die Wellengleichung nicht erfüllt und sie sind *keine* Charakteristiken. Diese sind bekanntlich gegeben durch:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Dieselben Überlegungen lassen sich hinsichtlich der Wellengleichung zwar auch auf die mit der Phasengeschwindigkeit  $v$  fortschreitenden Hauptebenen anwenden. Diese sind aber im Gegensatz zu den seitlichen Hauptebenen *keine Charakteristiken* der Maxwell-Gleichungen außer für  $v = c$ .

Die Frage nach der Existenzfähigkeit einer Kette kann man auch in die Gestalt eines Anfangswertproblems kleiden. Man hat für  $t = 0$  die Werte von  $\psi$  und  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  vorzuschreiben. Es sei:

$$\psi(x, y, z, 0) = A \cos \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos \frac{\omega y}{v_y} \cdot \cos \frac{\omega z}{v},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, y, z, 0) = \omega A \cos \frac{\omega x}{v_x} \cdot \cos \frac{\omega y}{v_y} \cdot \sin \frac{\omega z}{v}$$

$$\text{für} \quad \left| \frac{\omega x}{v_x} \right| \leq \frac{\pi}{2}, \quad \left| \frac{\omega y}{v_y} \right| \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\psi(x, y, z, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0$$

$$\text{für} \quad \left| \frac{\omega x}{v_x} \right| > \frac{\pi}{2}, \quad \left| \frac{\omega y}{v_y} \right| > \frac{\pi}{2}.$$

Wesentlich hierbei ist, daß die inneren Intervalle für  $\frac{\omega x}{v_x}$  und  $\frac{\omega y}{v_y}$  abgeschlossen sind. Die Funktionen sind stetig,  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0)$  aber ist unstetig. Die hier vorliegende Unstetigkeit nennen wir eine vom Typus a, die Verhältnisse werden durch Abb. 1 a gekennzeichnet. Man erkennt unmittelbar, daß dieses Anfangswertproblem durch (49) gelöst wird. Es ist zu beachten, daß die Funktion  $\frac{\partial \psi(0)}{\partial x}$  vom Typus a nicht durch ein *Fouriersches* Integral darstellbar ist.

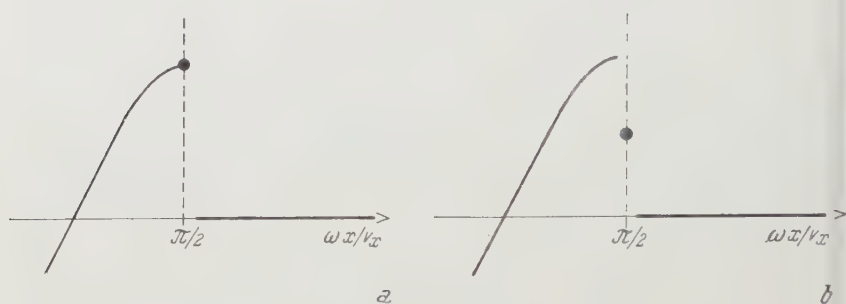


Abb. 1. Unstetigkeiten der Funktion  $\frac{\partial \psi(0)}{\partial x}$ .

Wir ändern nun die Anfangsfunktionen so ab, daß an den Sprungflächen die Funktionswerte gleich dem arithmetischen Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert werden. Auf die Funktion  $\psi(0)$  wirkt sich diese Maßnahme infolge ihrer Stetigkeit nicht aus, es wird also nur der Funktionswert der unstetigen Funktion  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0)$  auf die Hälfte herabgesetzt. Alles übrige bleibe unverändert. Dieser Unstetigkeit vom Typus b entspricht Abb. 1 b. Für dieses Anfangswertproblem ist (49) keine Lösung, weil der Wert von  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0)$  bei Annäherung an den Anfangswert  $t = 0$  nicht angenommen wird. Man kann aber die Funktion (49) auch nicht etwa dadurch zu einer Lösung von b machen, daß man ihr an den Sprungflächen die Hälfte des ursprünglichen Funktionswertes zuschreibt. Denn dann wäre die abgeänderte<sup>2)</sup> Funktion (49) an den Sprungflächen nicht mehr differenzierbar und würde damit der Wellengleichung nicht genügen. Zur Lösung des Anfangswertproblems b ist das übliche Verfahren der Superposition partikulärer Integrale heran-

<sup>2)</sup> Die inneren Intervalle sind dann offen!



zuziehen, welches wegen der dabei auftretenden *Fourierschen* Integraldarstellungen an Unstetigkeitsstellen das arithmetische Mittel der beiderseitigen Funktionswerte liefert. Die uns hier nicht weiter interessierende Rechnung würde für den Typus b zu dem bekannten Ergebnis führen, daß die Kette im Laufe der Zeit zerfließt.

Bei *Makrovorgängen* haben wir es niemals mit unstetigen Anfangsfunktionen im mathematischen Sinne zu tun. Sie sind genau genommen immer stetig und stetig differenzierbar. Daß wir trotzdem bei derartigen Problemen mit unstetigen Funktionen rechnen können, hat seinen Grund darin, daß solche sehr steil verlaufende Funktionen durch unstetige Funktionen vom Typus b (aber nicht vom Typus a) mit außerordentlich guter Annäherung idealisiert werden können. Die Anwendbarkeit des Superpositionsverfahrens, das gewisse Stetigkeitseigenschaften für die Anfangsfunktionen voraussetzt, ist daher hier immer gewährleistet. Eingehendere Hinweise über die Anwendbarkeit des Verfahrens findet man bei *Courant-Hilbert* [4], S. 386, S. 395, S. 486 f. Das Superpositionsverfahren führt im allgemeinen immer auf ein Zerfließen der Energie. Die Lösung (49) scheidet daher für Makrovorgänge grundsätzlich aus.

Die physikalische Zulässigkeit unserer nicht zweimal stetig differenzierbaren Lösung für *Mikrovorgänge* kann daher auf die Frage zurückgeführt werden, ob man diesen Vorgängen dieselben Anfangseigenschaften zuschreiben will wie den Makrovorgängen (Typus b) oder ob man den Mikrovorgängen auch Anfangseigenschaften vom unstetigen Typus a zuordnen kann. Entscheidet man sich für die zweite Alternative, dann ist der Zusammenhalt der Kette gewährleistet.

Die Zulassung der Lösung (49) widerspricht also weder dem Eindeutigkeitssatz des Anfangswertproblems noch der Tatsache, daß man bei Makrovorgängen immer ein Zerfließen der Energie beobachtet.

Die weitergehende Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse der Kette stellen wir zurück. Sie sind wohl mindestens so fundiert wie die Stabilitätsverhältnisse des Elektrons in der *Lorentzschen* Theorie.

Den Unterschied zwischen den Fällen a und b kann man sich auch an einem mechanischen Modell veranschaulichen. Der Fall a entspricht einem mit einem Gas gefüllten Behälter, dessen Wände absolut dicht schließen. Der dichte Verschuß soll die Abgeschlossenheit des Intervalls versinnbildlichen. Im Falle b dagegen ist der Verschuß an den Wänden unvollkommen, dies entspricht dem isolierten Punkt in Abb. 1 b. Im ersten Falle bleibt das Gas im Behälter, im zweiten Falle strömt es aus.

Werden mehrere Ketten von gleichem  $m_0$  überlagert, deren Frequenzen um  $d\nu$  voneinander abweichen, so unterscheiden sich deren Phasengeschwindigkeiten um  $d\nu$ . Man erhält eine Wellengruppe vom Querschnitt eines Phasenteilchens. Infolge



der Dispersion läßt sich nur die Gruppengeschwindigkeit  $g$  messen, welche mit der Energiegeschwindigkeit  $u$  übereinstimmt.

Läßt sich die Kettenhypothese für die Mikrovorgänge aufrechterhalten, dann können korpuskulare Eigenschaften aus elektromagnetischen Wellenfeldern gefolgert werden, wobei der Kettendurchmesser umgekehrt proportional  $m_0$  ist und beispielsweise für Mesonen den Wert von  $4 \cdot 10^{-13}$  cm erreicht.

## 6. Quasiebene Wellenfelder. Lichtquanten.

Es erhebt sich nun naturgemäß die Frage, ob sich unter Zugrundelegung der Kettenhypothese die Energiekonzentration der Lichtquantenvorgänge mit unserem Wellenfeld erfassen läßt. Aus (47) folgt für  $v = u = c$  zwangsläufig  $m_0 = 0$ . Dann wird nach (5) und (6)  $\lambda_z = \lambda_c$  und  $\lambda_x = \lambda_y = \infty$ . Der Kettenquerschnitt reicht in beiden Richtungen ins Unendliche. Nimmt man hingegen an, daß  $v$  nur wenig oberhalb von  $c$  liegt, dann kommt man wohl auf einen durch den Kettenquerschnitt festgelegten Bereich, innerhalb dessen die Energie zusammengeballt ist. Aber das Feld ist nicht eben und es wird  $m_0 \neq 0$ , man bekommt im Vakuum Dispersion, was mit den Tatsachen scheinbar nicht zu vereinbaren ist.

Die Frage läuft also darauf hinaus, die Verhältnisse in der unmittelbaren Nachbarschaft von  $v = c$  genauer zu untersuchen. Es sei also

$$\frac{v}{c} = 1 + \kappa, \quad (50)$$

wobei  $\kappa \ll 1$  gelten soll. In Wellenlängen ausgedrückt ergibt das:

$$\frac{\lambda}{\lambda_c} = 1 + \kappa. \quad (51)$$

In den weiteren Rechnungen berücksichtigen wir immer nur die niedrigste Potenz von  $\kappa$ . Aus (23) findet man mit (50) durch Reihenentwicklung:

$$\frac{u}{c} = 1 - \frac{1}{2} \kappa^2. \quad (52)$$

Aus (41) wird mit (51):

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{h v}{c^2} \cdot (1 - \kappa), \\ m_0 &= \frac{h v}{c^2} \cdot \kappa. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Aus (6) ergibt sich mit (51) für die Abmessungen der Kette der Zusammenhang:

$$\left( \frac{\lambda}{\lambda_x} \right)^2 + \left( \frac{\lambda}{\lambda_y} \right)^2 = 2 \kappa.$$

Im folgenden interessieren wir uns nur für den kleinsten Kettenquerschnitt, also  $\lambda_x = \lambda_y$ . Dann wird

$$\frac{\lambda}{\lambda_x} = \frac{\lambda}{\lambda_y} = \sqrt{\kappa}. \tag{54}$$

Eine Abschätzung der für  $\kappa$  und  $m_0$  in Betracht zu ziehenden Größenordnungen läßt sich aus dem bekannten Versuch von *Joffé* und *Dobronravow* [5] gewinnen. Sie bestrahlten ein Wismutteilchen von  $2 \cdot 10^{-5}$  bis  $10^{-4}$  cm Durchmesser alle  $10^{-3}$  Sekunden mit Röntgenimpulsen und stellten fest, daß bei genügend schwacher Intensität im Mittel nur alle 30 Minuten die Emission eines lichtelektrischen Elektrons erfolgte. Als Antikathode diente eine Aluminiumfolie, die mit 10 bis 12 kV-Elektronen beschossen wurde. Die Verfasser kommen zu dem Ergebnis, daß die Energie entsprechend der Teilchengröße innerhalb eines Raumwinkels von  $10^{-6}$  bis  $2 \cdot 10^{-5}$  konzentriert sein mußte. Nimmt man gleichen Durchmesser von Wismutteilchen und Kette an, so ist zu setzen:

$$2 \cdot 10^{-5} \leq \frac{\lambda_x}{2} = 10^{-4}.$$

Die benutzten Spannungen von 10 bis 12 kV ergeben als kurzwellige Grenze der Bremsstrahlung  $\lambda = 1 \text{ \AA}$ . Bei Folien liegt nun, im Gegensatz zur massiven Antikathode, das Maximum der Intensität je Wellenlängenintervall an der kurzwelligen Grenze [6]. Wir können daher als für den Versuch wirksame Wellenlänge

$$\lambda = 10^{-8} \text{ cm}$$

ansetzen. Aus (54) folgt mit diesen Zahlenwerten:

$$2 \cdot 10^{-9} \leq \kappa \leq 60 \cdot 10^{-9}.$$

In der folgenden Tabelle sind die aus den Gl. (52) und (53) berechneten Werte von  $u$  und  $m_0$  zusammengestellt. Die Ruhmasse des Photons liegt nach diesen Schätzungen zwischen  $5 \cdot 10^{-38}$  und  $140 \cdot 10^{-38}$  g. Die Abweichung der Gruppengeschwindigkeit von  $c$  ist kleiner als  $2 \cdot 10^{-15}$ .

Tabelle.

			$m_0$ [g]	$\kappa$	$1 - \frac{u}{c}$
Nadelstrahlung $\lambda = 10^{-8} \text{ cm}$			$\leq 140 \cdot 10^{-38}$	$\leq 60 \cdot 10^{-9}$	$\leq 2 \cdot 10^{-15}$
			$\geq 5 \cdot 10^{-38}$	$\geq 2 \cdot 10^{-9}$	$\geq 3 \cdot 10^{-18}$
Dispersion $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$	A	$p = 1$	$\leq 7 \cdot 10^{-38}$	$\leq 2 \cdot 10^{-5}$	$\leq 1 \cdot 10^{-10}$
	B	$p > 1$	$\leq 7 \cdot 10^{-38} \sqrt{p}$	$\leq 2 \cdot 10^{-5} \sqrt{p}$	$\leq 1 \cdot 10^{-10} p$

Aus der zweiten Gleichung von (53) folgt mit (50):

$$m_0 = \frac{h}{c^2} \cdot \frac{v}{\lambda} \cdot \kappa = \frac{h}{c} \cdot (1 + \kappa) \cdot \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Das ergibt wegen  $\kappa \ll 1$ :

$$\kappa = \frac{m_0 c}{h} \cdot \lambda.$$

Somit wird aus (52):

$$\frac{u}{c} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \cdot \lambda^2. \quad (55)$$

Die Gruppengeschwindigkeit nimmt also mit wachsender Wellenlänge ab; die Gruppen im Roten laufen *langsamer* als die im Violetten. Im Gegensatz zu diesen Dispersionsverhältnissen im Vakuum wächst bei der normalen Dispersion die Gruppengeschwindigkeit mit wachsender Wellenlänge; in einem normal dispergierenden Stoff laufen die Gruppen im Roten *rascher* als die im Violetten.

Es soll nun geprüft werden, ob unsere Ergebnisse mit den Dispersionsverhältnissen des Lichtes im Einklang stehen. H. Shapley [7], [8], [9] hat versucht, eine Dispersion des Lichtes im Weltraum festzustellen. Er untersuchte den Lichtanstieg der  $\delta$ -Cephei-Veränderlichen eines 40.000 Lichtjahre entfernten Kugelhaufens. Zwischen dem Intensitätsanstieg der Linien  $\lambda_1 = 4500 \text{ \AA}$  und  $\lambda_2 = 5500 \text{ \AA}$  ließen sich keine Epochenabweichungen feststellen. Unter Berücksichtigung der erreichten Meßgenauigkeit ergibt sich, daß die Gruppengeschwindigkeiten für diese beiden Linien bis auf  $1:2 \cdot 10^{10}$  übereinstimmen.

Fall A: Nimmt man nun an, daß die mögliche Abweichung zwischen den Gruppengeschwindigkeiten  $u_1$  und  $u_2$  von der Größe

$$\sigma \leq 5 \cdot 10^{-11}$$

ausschließlich durch eine „ $m_0$ -Dispersion“ im absoluten Vakuum hervorgerufen wird, so folgt aus (55) durch Subtraktion der für die Indizes 1 und 2 geltenden Gleichungen:

$$\frac{u_1 - u_2}{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \cdot (\lambda_2^2 - \lambda_1^2).$$

Mit

$$\frac{u_1}{u_2} = 1 + \sigma$$

ergibt sich

$$m_0 = \frac{h}{c} \cdot \sqrt{\frac{2\sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}.$$

Aus den angegebenen Zahlenwerten findet man

$$m_0 \leq 7 \cdot 10^{-38} \text{ g.}$$

Die obere Grenze liegt knapp innerhalb des aus dem Quantenversuch geschätzten Intervalls.

Fall B: Geht man hingegen von der Annahme aus, daß das Licht auf der Strecke von 40.000 Lichtjahren zum Teil auch Zonen mit normaler Dispersion durchlaufen hat (*Nordmann-Tichoff*-Effekt), dann ist die obere Grenze von  $\sigma$  für den Anteil der  $m_0$ -Dispersion höher anzusetzen. Denn die  $m_0$ -Dispersion und die normale Dispersion kompensieren sich teilweise hinsichtlich einer festzustellenden Epochenabweichung. Man bekommt dann für  $m_0$  eine höher liegende Grenze als  $7 \cdot 10^{-38}$  g, die sich damit mehr nach der Mitte des aus dem Röntgenversuch abgeleiteten Intervalls verschiebt. In diesem Fall ist

$$\sigma \leq 5 \cdot 10^{-11} \cdot p,$$

wobei  $p > 1$  ist.

Aus der Tafel entnimmt man im Falle A für  $\kappa$  einen Wert unterhalb von  $10^{-4}$ . Das Wellenfeld ist also mit einer außerordentlich guten Annäherung als eben zu betrachten. Ferner zeigt sich, daß die Gruppengeschwindigkeit um weniger als  $10^{-9}$  von  $c$  abweicht. Die berechneten Abweichungen zwischen  $u$  und  $c$  liegen also rund 4 Zehnerpotenzen unterhalb der von *Michelson* im Sichtbaren erreichten Meßgenauigkeit von etwa  $\pm 10^{-5}$ .

Aus den Abschätzungen geht hervor, daß mit einer Ruhmasse des Photons von etwa  $10^{-37}$  g der Quantenversuch wellenmäßig gedeutet werden kann, ohne daß hierdurch Schwierigkeiten mit den Dispersionsverhältnissen des Lichtes im Vakuum entstehen oder Diskrepanzen mit der Relativitätstheorie auftreten. Die obere Grenze der Signalgeschwindigkeit ist  $c$ . Es gilt für jeden Wert von  $m_0 \neq 0$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u = c.$$

### Zusammenfassung.

Aus einem elektromagnetischen Wellenfeld im Vakuum, dessen Dispersionsgesetz zunächst noch unbestimmt bleibt, wird durch geeignete Spaltung der Energiedichte eine neue Deutungsmöglichkeit für die Geschwindigkeit gewonnen, mit der die Energie strömt. Diese Energiegeschwindigkeit  $u$  liegt immer unterhalb von  $c$ , die Phasengeschwindigkeit  $v$  ist größer als  $c$ .

Das Wellenfeld zergliedert sich in kleinste Bezirke (Phasenelemente), die mit ihrer Umgebung in keinem Energieaustausch stehen. Vier Phasenelemente ergeben ein Phasenteilchen. Es bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit  $v$ , die Energie strömt mit der Energiegeschwindigkeit  $u$ . Zwischen den durch die Energiespaltung gewonnenen Anteilen des Energieinhaltes ergibt sich ein von der Geschwindigkeit  $u$  abhängiger Zusammenhang,



in welchen die Ruhmasse  $m_0$  eingeführt wird. Der gesamte Energieinhalt des Phasenteilchens ist proportional der Frequenz  $\nu$ . An dieser Stelle eröffnet sich die Möglichkeit für die Einbeziehung des elementaren Wirkungsquantums  $h$ . Das damit festgelegte Dispersionsgesetz führt auf die Gruppengeschwindigkeit  $g$ , welche mit der Energieschwindigkeit  $u$  identisch ist.

Aus diesen energetischen Zusammenhängen fließen eine Reihe bekannter Gesetzmäßigkeiten der Mikromaterie und des Lichtes.

Durch Hinzunahme der Kettenhypothese, die auf der Zulassung von nicht stetig differentiierbaren Lösungen der Wellengleichung beruht, ergibt sich die Möglichkeit, die auf engsten Raum begrenzte Energiekonzentration von Quantenvorgängen im Sinne einer einheitlichen Wellenauffassung verständlich zu machen.

Aus dem bekannten Versuch von *Joffé* und *Dobronravov* über quantenhafte Eigenschaften von Röntgenlicht (1 ÅE) ergibt sich eine Abschätzung für die Ruhmasse des Photons. Sie liegt zwischen  $5 \cdot 10^{-38}$  und  $140 \cdot 10^{-38}$  g. Die Gruppengeschwindigkeit weicht um weniger als  $2 \cdot 10^{-15}$  von  $c$  ab.

Messungen von *Shapley* über die Dispersionsverhältnisse des Lichtes im Weltraum (5000 ÅE), das eine Entfernung von 40.000 Lichtjahren durchlaufen hat, ergeben für die Ruhmasse des Photons einen Wert von höchstens  $7 \cdot 10^{-38}$  g, der innerhalb des aus dem Quantenversuch geschätzten Intervalls liegt. Die Gruppengeschwindigkeit weicht um weniger als  $10^{-9}$  von  $c$  ab.

Die gesamte Schwankung der Gruppengeschwindigkeit für die verschiedenen Wellenlängen von 1 ÅE bis 5500 ÅE liegt rund 4 Zehnerpotenzen unterhalb der von *Michelson* erreichten Meßgenauigkeit von  $\pm 10^{-5}$ . Es gilt  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} u = c$ .

Den Herren Dr. *K. Siebertz* und Dr. *R. Wiesner* danke ich für wertvolle Hinweise anlässlich zahlreicher Diskussionen.

#### Literatur.

- [1] *H. Bateman*, Electrical and optical wave motion, Cambridge 1915.
- [2] *H. Geiger* u. *K. Scheel*, Handbuch der Physik **12**, 100 ff., 103 f., 178.
- [3] *A. Sommerfeld*, Atombau und Spektrallinien **2**, 1 (Fußnote), 8 (Fußnote), 12 f. (1939).
- [4] *R. Courant* u. *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik **2**, 143 f., 386, 395, 468 f. (1937).
- [5] *Joffé* u. *Dobronravov*, Beobachtung über die Ausbreitung von Röntgenimpulsen, Z. Physik **34**, 889 (1925).
- [6] *R. W. Pohl*, Einführung in die Optik, 233 (1940).
- [7] *H. Shapley*, Proc. Nat. Acad. **9**, 5386 (1923).
- [8] *W. Wien* u. *F. Harms*, Handbuch der Experimentalphysik **18**, 34.
- [9] *K. Graff*, Grundriß der Astrophysik, 667 f. (1928).



# Neue Erkenntnisse über die elektronenoptischen Eigenschaften magnetischer Ablenkfelder.

Von

**Richard F. K. Herzog.**

I. Physikalisches Institut der Universität Wien.

Mit 14 Abbildungen.

(Eingelangt am 27. April 1950.)

## Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß ein homogenes magnetisches Ablenkfeld, abgesehen von der Ablenkung, im allgemeinen so wie ein System von zwei gekreuzten Zylinderlinsen wirkt. Die eine fokussiert ein in der Symmetrieebene zwischen den Polschuhen liegendes ebenes Strahlenbündel in der bekannten Weise in radialer Richtung; die andere fokussiert ein ebenes Strahlenbündel, dessen Ebene auf der Symmetrieebene senkrecht steht. Die Brennweite dieser bisher unbeachteten Linse wird berechnet; hierbei zeigt sich, daß diese Brennweite nur dann unendlich ist, wenn der Strahl das Feld senkrecht zu dessen Begrenzung betritt, beziehungsweise verläßt. Bei schrägem Ein- und Austritt wirken die beiden Streufelder so wie Sammel- oder Zerstreuungslinsen, je nach den Winkeln zwischen den Richtungen des Strahles und jenen der stärksten Abnahme des Feldes. Es werden besonders jene Spezialfälle diskutiert, bei denen die Brennpunkte der beiden gekreuzten Zylinderlinsen zusammenfallen. Die experimentelle Überprüfung ergab gute Übereinstimmung mit der Theorie.

## Einleitung.

In einem homogenen Magnetfeld bewegen sich bekanntlich elektrisch geladene Teilchen auf Schraubenbahnen, wobei die Schraubenachse zu den Kraftlinien parallel ist und die Geschwindigkeit konstant bleibt. Wenn die Anfangsgeschwindigkeit zu den Kraftlinien senkrecht steht, so ist die Steigung der Schraube gleich Null und die Bewegung erfolgt auf einer Kreisbahn. Den Radius  $a$  (in Zentimeter gemessen) dieser Bahn findet man aus dem Kräftegleichgewicht zwischen der Zentrifugal- und der Lorentz-Kraft.

$$a = m \cdot v / e \cdot H_0. \quad (1)$$

Hierin bedeutet  $m$  die Masse in g,  $e$  die Ladung in abs. electromagnetischen Einheiten,  $v$  die Geschwindigkeit der Teilchen in cm/sec und  $H_0$  die Feldstärke des homogenen Feldes in Gauß. Die Ebene einer

solchen Kreisbahn, u. zw. im besonderen die Symmetrieebene zwischen den Polschuhen, wollen wir zur Zeichenebene aller Bahnen wählen. Wir betrachten nun die Bahn eines anderen Teilchens, das dem obigen völlig gleicht, dessen Bewegungsrichtung jedoch um einen sehr kleinen Winkel gegen die Symmetrieebene geneigt ist. Die Projektion der entstehenden Schraubenbahn auf die Symmetrieebene fällt mit obiger Kreisbahn zusammen. Es genügt daher auch für räumliche Bahnen die Betrachtung in einer Ebene, wobei man nur zu beachten hat, daß jene Bahnen, die gegen diese Ebene geneigt sind, ihren Abstand von ihr linear mit der Bahnlänge ändern. Diese Betrachtungsweise ist dann besonders einfach und zweckmäßig, wenn das Strahlenbündel annähernd senkrecht zu den Kraftlinien verläuft (transgradienter Strahlengang). Im Gegensatz hierzu sind die Bahnen im Elektronenmikroskop annähernd parallel zu den magnetischen Kraftlinien, also kongradient. Bei den transgradienten Feldern, mit denen ich mich im folgenden ausschließlich befassen werde, sind bisher hauptsächlich die Bahnen in der Symmetrieebene untersucht worden<sup>1)</sup>, wobei gefunden wurde, daß hierbei eine Linsenwirkung auftritt. Da das homogene Magnetfeld keinen Einfluß auf die Neigung der Bahnen gegen die Symmetrieebene hat, so tritt senkrecht zu dieser auch keinerlei Linsenwirkung auf. Insgesamt wirkt also das homogene Ablenkkfeld wie eine Zylinderlinse, das heißt, das „Bild“ eines Punktes wird eine Linie. Dies gilt nur wenn der ganze Strahlengang im homogenen Magnetfeld verläuft.

Wir wollen im folgenden jedoch jenen allgemeineren Fall betrachten, bei dem der Strahl das Feld durchsetzt und zum Teil auch im feldfreien Außenraum verläuft. Hier wird die Linsenwirkung wesentlich durch das Streufeld beeinflusst; es wird im Laufe dieser Arbeit gezeigt, daß dann auch an Bündeln, die in einer solchen Ebene liegen, die senkrecht zur Symmetrieebene steht, eine Linsenwirkung auftritt. Da diese neuartige Fokussierung in einer Richtung erfolgt, die parallel zu den Kraftlinien des homogenen Feldes ist, bezeichnen wir sie kurz als „axiale Linsenwirkung“. Um zu einfachen Ergebnissen zu gelangen, was für die praktischen Anwendungen besonders wichtig ist, setzen wir voraus, daß das Streufeld durch geeignete Blenden<sup>2)</sup> auf einen kleinen Raum beschränkt wird, so daß der Feldabfall im wesentlichen auf einer Strecke erfolgt, die klein im Vergleich zum Krümmungsradius der Bahn im homogenen Feld ist. Ferner beschränken wir uns auf enge Strahlenbündel, die den Bedingungen der *Gaußschen* Optik genügen. Ehe wir

<sup>1)</sup> N. F. Barber, Proc. Leeds Phil. Soc. 2, 427 (1932); R. Herzog, Z. Physik 89, 447 (1934); L. Cartan, J. Phys. Rad. 8, 453 (1937).

<sup>2)</sup> R. Herzog, Arch. f. Elektrotechn. 29, 790 (1935); R. Herzog, Z. Physik, 97, 596 (1935); R. Herzog, Physikal. Z. 41, 18 (1940).

auf die Untersuchung der Linsenwirkung in einer Ebene senkrecht zur Symmetrieebene eingehen, die bisher in den einschlägigen Arbeiten nicht beachtet wurde, soll gezeigt werden, wie die Linsenwirkung in der Symmetrieebene von der Begrenzung des Feldes, u. zw. von dem Winkel  $\gamma''$  (siehe Abb. 2) zwischen der Richtung  $x''$  des Strahles und jener  $n''$  des Feldgradienten, abhängt.

### I. Radiale Linsenwirkung in der Symmetrieebene zwischen den Polschuhen.

Die einfachsten Verhältnisse liegen dann vor, wenn der Mittelstrahl des Bündels, der sogenannte Achsenstrahl ( $-x'$ ,  $K_0$ ,

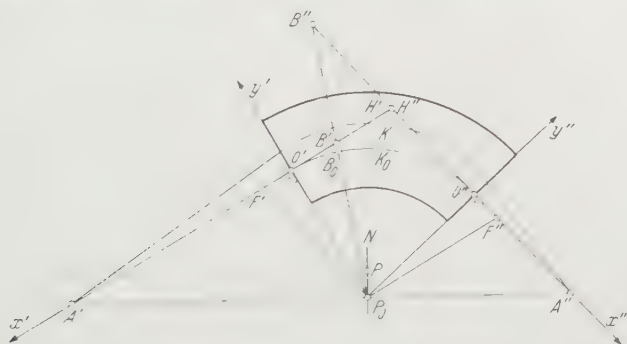


Abb. 1. Radiale Fokussierung durch ein homogenes Magnetfeld. Senkrechter Ein- und Austritt.

$x''$ , siehe Abb. 1), das Magnetfeld senkrecht zu dessen Begrenzung betritt und verläßt. In diesem Falle liegen Objekt  $A'$ , Feldsektormittelpunkt  $P_0$  und Bild  $A''$  auf einer Geraden, wie dies von *N. F. Barber* bewiesen wurde. Man sieht dies leicht ein, wenn man bedenkt, daß die Mittelpunkte  $P$  der Kreise  $K$  in erster Näherung auf einer Geraden  $N$  liegen müssen, die senkrecht zu  $A'P_0$  ist. Die Bahnen werden sich nur dann in  $A''$  schneiden, wenn auch  $P_0A''$  senkrecht zu  $N$  ist. Also muß  $A'P_0A''$  eine Gerade sein. Diese Bildkonstruktion gilt auch dann, wenn die von außen kommenden Strahlen gegen einen im Feld liegenden Punkt  $B'$  konvergieren; nach dem Verlassen des Feldes werden die Strahlen scheinbar aus dem virtuellen Bild  $B''$  kommen. Der tatsächliche Schnittpunkt der Strahlen im Feld ist  $B_0$ . Auch in diesem Falle liegen  $B'B''$  und  $P_0$  auf einer Geraden.

Die Brennpunkte finden wir leicht als Bilder unendlich ferner Objekte, wenn wir durch  $P_0$  Parallele zu  $x'$ , bzw. zu  $x''$  zeichnen und mit  $x'$ , bzw.  $x''$  zum Schnitt bringen. Die beiden Hauptpunkte sind gegenseitige Bilder und müssen daher so wie

$B' B''$  auf einer Geraden liegen, die durch  $P_0$  geht. Da jedoch überdies der Polschuh in bezug auf den Strahlengang symmetrisch ist, muß  $H'$  und  $H''$  von den Feldrändern  $O'$  und  $O''$  gleichen Abstand haben, was nur dann der Fall ist, wenn  $H'$  und  $H''$  im Schnittpunkt der Achsen liegen. Da also hier die Hauptpunkte zusammenfallen, kann das Feld, von der Strahlablenkung abgesehen, als dünne Linse aufgefaßt werden.

Wenn nun die Feldbegrenzung nicht senkrecht zur Strahlachse steht, sondern gegen diese geneigt ist, so findet am Feld-

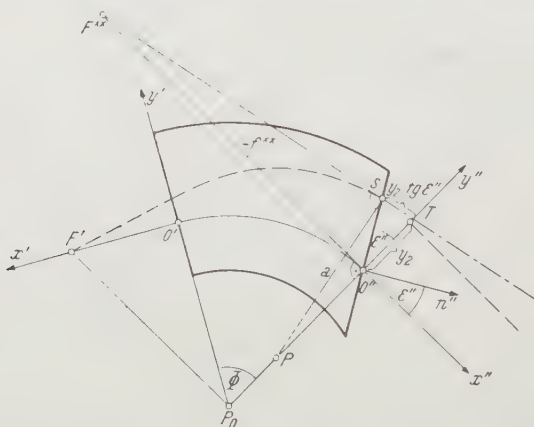


Abb. 2. Radiale Fokussierung durch ein homogenes Magnetfeld. Senkrechter Eintritt, jedoch schräger Austritt.

rand eine zusätzliche Linsenwirkung statt. Wir denken uns nun dieses Feld zusammengesetzt: einerseits aus dem oben beschriebenen Feld, dessen Rand senkrecht zum Strahl steht, und andererseits aus einem Keil mit dem Winkel  $\varepsilon''$ , der zu dem obigen Feld teils addiert, teils von diesem subtrahiert wird, je nachdem ob  $y''$  kleiner oder größer als Null ist (siehe Abb. 2). Wir betrachten zunächst eine Feldbegrenzung, die senkrecht auf den optischen Achsen  $x'$ ,  $x''$  steht. Ein durch den vorderen Brennpunkt  $F'$  dieses Feldes gehender Strahl würde nach dem Verlassen des Feldes im Abstand  $y_2$  parallel zu  $x''$  austreten (gestrichelt gezeichnet). Schneidet man nun vom Feld den Keil  $\varepsilon''$  ab, so wird der Strahl schon in  $S$  gerade austreten (strichpunktirt gezeichnet), also scheinbar aus dem virtuellen Brennpunkt  $F^{\times\times}$  kommen. Dieser Keil kann daher im optischen Sinne als dünne Zerstreulinse aufgefaßt werden. Für achsennahe Strahlen sind die beiden Dreiecke  $PST$  und  $F^{\times\times}O'T$  ähnlich; aus diesen folgt  $-f^{\times\times}/y_2 = a/(y_2 \operatorname{tg} \varepsilon'')$ , und daraus erhalten wir die Brennweite der dünnen Linse an der Austrittsseite des Feldes:

$$f^{\times\times} = -a \operatorname{ctg} \varepsilon''. \quad (2^{\times\times})$$



Für die Eintrittseite gilt analog:

$$f^x = -a \cotg \varepsilon'. \quad (2^x)$$

(In Abb. 2 wurde jedoch der Einfachheit halber  $\varepsilon' = 0$  angenommen.) Abgesehen von der Strahlablenkung können wir daher das ganze Feld im optischen Sinne als ein System von drei dünnen Einzellinsen auffassen. Die Lage der Brennpunkte und die Brennweite des Gesamtsystems lassen sich leicht aus den optischen Daten der drei Einzellinsen nach jenen Methoden<sup>3)</sup> berechnen, die auch in der Lichtoptik bei zusammengesetzten Objektiven angewendet werden. Man erhält so auf geometrisch-optischem Wege die gleichen Formeln, die ich seinerzeit aus den Bahngleichungen hergeleitet habe:

$$g' = a \cdot \frac{\cos \varepsilon' \cos (\Phi - \varepsilon'')}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')};$$

$$g'' = a \cdot \frac{\cos \varepsilon'' \cos (\Phi - \varepsilon')}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} \quad (3)$$

$$f = a \cdot \frac{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} \quad (4)$$

Für die numerische Auswertung ist jedoch folgende Schreibweise vorzuziehen:

$$a/g' = \operatorname{tg} (\Phi - \varepsilon'') - \operatorname{tg} \varepsilon';$$

$$a/g'' = \operatorname{tg} (\Phi - \varepsilon') - \operatorname{tg} \varepsilon''. \quad (3')$$

Das neue Verfahren zeigt deutlich, wie sich die Gesamtwirkung zusammensetzt: Erstens aus einem vom Feldinneren herrührenden Anteil und zweitens aus jenen Teilen, die von den beiden Feldrändern verursacht werden. Auf letztere werden wir später nochmals zurückkommen.

## II. Axiale Linsenwirkung in einer Ebene, die senkrecht zur Symmetrieebene steht.

Alle bisherigen Überlegungen bezogen sich auf Bahnen, die in der Symmetrieebene verlaufen. Auf dieser Ebene stehen die Kraftlinien senkrecht; daher wird ein Teilchen, dessen Bahn vor dem Feld in dieser Ebene verläuft, auch nach der Ablenkung eine Bahn beschreiben, die ganz in dieser Ebene liegt. Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf Bahnen, die außerhalb der Symmetrieebene verlaufen. Wir machen sie zunächst nur für das Streufeld beim Verlassen des Feldes; sie lassen sich dann auch auf jenes beim Eintritt übertragen.

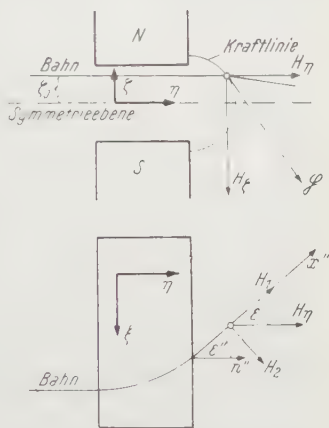


Abb. 3. Magnetisches Streufeld und Teilchenbahn in Grund- und Aufriss.

<sup>3)</sup> Handbuch der Physik, Bd. 18, S. 38.



Wir betrachten nun ein Teilchen (siehe Abb. 3), das außerhalb der Symmetrieebene, jedoch parallel zu ihr das Streufeld passiert; in diesem Falle stehen die Kraftlinien nicht mehr senkrecht auf der Bahn. Wir zerlegen die magnetische Feldstärke  $\vec{S}$  in zwei Komponenten,  $H_z$  senkrecht zur Symmetrieebene und  $H_r$  parallel zur Symmetrieebene. Die Komponente  $H_r$  zerlegen wir weiter in die Komponenten  $H_1$  in der Richtung der Bahn und in  $H_2$  senkrecht dazu. Die Komponente  $H_z$  bewirkt die bekannte Ablenkung des Strahles;  $H_1$  hat keinen Einfluß auf die Bewegung. Die Komponente  $H_2$ , die bisher nur wenig beachtet wurde, erzeugt eine Kraft<sup>4)</sup> senkrecht zur Symmetrieebene. Wie gleich gezeigt wird, ist diese Kraft in erster Näherung dem Abstand von der Symmetrieebene proportional und verursacht eine Sammlung der Strahlen auf dieser. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Komponente  $H_r$  für kleine Werte von  $\zeta$  in erster Näherung durch das lineare Glied einer Taylor-Reihe dargestellt werden kann:

$$H_r = \zeta \cdot \left( \frac{dH_r}{d\zeta} \right)_{\zeta=0}.$$

Die für die Ablenkung in der  $\zeta$ -Richtung verantwortliche Komponente  $H_2$  ist die Projektion von  $H_r$  auf die Normale zur Bahn.  $H_2 = H_r \cdot \sin \varepsilon$ . Setzt man hierin  $H_r$  ein und beachtet man, daß  $\frac{\partial H_r}{\partial \zeta} = \frac{\partial H_z}{\partial \eta}$  ist, so findet man:

$$H_2 = \zeta \sin \varepsilon \cdot \left( \frac{dH_z}{d\eta} \right)_{\zeta=0}. \quad (5)$$

Die Beschleunigung in der  $\zeta$ -Richtung ist  $\ddot{\zeta} = (e/m) v H_2$ ; durch Integration erhält man die Änderung der  $\zeta$ -Komponente der Geschwindigkeit  $\dot{\zeta}_{t=+\infty} - \dot{\zeta}_{t=t_0} = \frac{e}{m} v \int_{t_0}^{+\infty} H_2 dt$ . Als An-

fangsbedingung nehmen wir an, daß der Strahl im homogenen Feld parallel zur Symmetrieebene verläuft und von dieser den Abstand  $\zeta_0$  hat, so daß also  $\dot{\zeta}_{t=t_0} = 0$  ist. Ferner ist für  $\zeta \ll v$  näherungsweise  $dt = d\eta/v \cdot \cos \varepsilon$  und daher

$$\dot{\zeta}_{t=+\infty} = \frac{e}{m} \cdot \int_0^{+\infty} \zeta \operatorname{tg} \varepsilon \left( \frac{dH_z}{d\eta} \right)_{\zeta=0} d\eta. \quad (6)$$

<sup>4)</sup> Diese Kraft macht man sich beim Zyklotron und beim Betatron zunutze, um die Strahlen nahe der Symmetrieebene zu halten. Da jedoch bei diesen Apparaten der Strahlengang zur Gänze im Streufeld verläuft, ist eine Trennung von Objekt und Bildraum im optischen Sinne unmöglich und daher eine Vergrößerung nicht zu erreichen. Siehe diesbezüglich auch: R. Wallauschek, Z. Physik 117, 565 (1941).

Wir setzen nun voraus, daß das Streufeld in der Strahlrichtung auf so engem Raum begrenzt ist, daß in diesem Gebiete keine wesentliche Änderung von  $\zeta$  und  $\varepsilon$  eintritt; es dürfen dann die Größen  $\zeta$  und  $\operatorname{tg} \varepsilon$ , die die konstanten Werte  $\zeta_0$  und  $\operatorname{tg} \varepsilon''$  haben, vor das Integral gesetzt werden.

$$\zeta_{\eta=+\infty} = \frac{e}{m} \cdot \zeta_0 \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dH_z}{d\eta} d\eta = \frac{e}{m} \cdot \zeta_0 \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' (H_z - H_z)_{\eta=+\infty, \eta=0}.$$

Hierin bedeutet  $H_z$  die Stärke des homogenen Feldes  $H_0$  und  $H_z$  die Feldstärke im Außenraum, die praktisch gleich Null ist.

Wir erhalten daher

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{e}{m} \cdot \zeta_0 \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' \cdot (-H_0). \quad (7)$$

Ersetzt man hierin mit Hilfe von Gl. (1) den Ausdruck  $(e/m) H_0 = v a$  und bezeichnet man mit  $x''$  die entlang dem Strahl gemessene Wegstrecke, so ist  $(e/m) H_0 = v a = (dx''/dt)$ . Setzt man dies oben ein, so erhält man den Ablenkwinkel im Streufeld

$$\frac{d\zeta}{dx''} = -(\zeta_0/a) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon''.$$

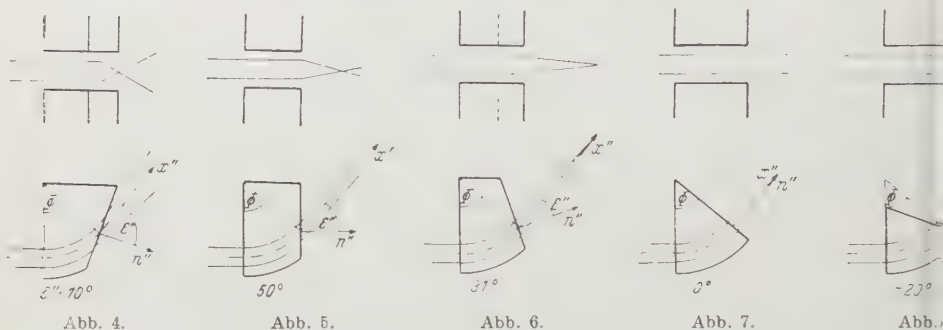
Da wir den Weg im Streufeld verschwindend kurz angenommen haben, ist die Gleichung des austretenden Strahles  $\zeta = \zeta_0 - x'' \cdot \frac{d\zeta}{dx''}$ , wobei die Koordinate  $x''$  vom Streufeld nach außen gemessen wird. Die Stelle  $x'' = f_2$ , an der  $\zeta = 0$  wird, finden wir aus

$$0 = \zeta_0 - (\zeta_0/a) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon'' \cdot f_2; \\ \underline{f_2 = a \cdot \cotg \varepsilon''}. \quad (8)$$

Wir sehen hieraus, daß diese Stelle von der Entfernung  $\zeta_0$  des Strahles von der Symmetrieebene unabhängig ist. Der Punkt, in dem sich daher alle Strahlen mit zwar kleinem, aber sonst beliebigem  $\zeta_0$  schneiden, ist also der Brennpunkt des Streufeldes. Man kann daher die Wirkung des Streufeldes durch eine dünne Linse am Feldrand ersetzen, deren Brennweite durch obige Formel gefunden wurde. Die genaue Lage dieser Linse läßt sich nur durch Berücksichtigung des genauen Feldverlaufes berechnen. Hierauf wird man jedoch im allgemeinen verzichten können, da es experimentell leicht möglich ist, den Weg im Streufeld kurz gegenüber der Brennweite zu machen. Wir haben bei der Ableitung der Formel (8) einige Annahmen gemacht, die vom experimentellen Standpunkt durchaus gerechtfertigt erscheinen und die die Rechnung ganz

wesentlich vereinfachen. Wir fanden so, daß die Brennweite dieser Streufeldlinse nur vom Winkel  $\epsilon''$  zwischen den Strahlen und der Normalen zum Feldrand einerseits und vom Bahnradius andererseits abhängig ist; dagegen ist die Brennweite von der speziellen Form des Streufeldes unabhängig. Die Einfachheit dieses Resultates ist für dessen praktische Verwertbarkeit in kompliziert zusammengesetzten Anordnungen (z. B. Massenspektrographen) von entscheidender Wichtigkeit, da es in diesen Fällen sonst kaum möglich wäre, jenen Überblick zu gewinnen, der zur Auswahl der günstigsten Feldanordnungen nötig ist.

Ist der Winkel  $\epsilon''$  Null, so findet keine Ablenkung statt, die Brennweite ist also unendlich<sup>5)</sup>. Im allgemeinen kann man sowohl die Wirkung einer Sammel- als auch einer Zerstreulinse erreichen. Die folgenden Bilder enthalten einige typische Fälle



Typische Linsenwirkung bei gleichem Ablenkwinkel  $\Phi$ , jedoch verschiedenem Austrittswinkel  $\epsilon''$ .

Untere Reihe: Grundriß mit Polschuhfläche und bekannter radialer Fokussierung.

Obere Reihe: Aufriß mit neuartiger axialer Fokussierung.

transgradienter magnetischer Linsen. Um die Darstellung möglichst einfach und übersichtlich zu machen, wurde in allen Fällen angenommen, daß ein Parallelstrahlbündel das Magnetfeld senkrecht zum Feldrand betritt. Die oberen Hälften der Abb. 4—8 zeigen die Formen der Polschuhbegrenzung und den bekannten Strahlengang in der Symmetrieebene; die Kraftlinien stehen hier also senkrecht zur Zeichenebene. Die oberen Hälften der Bilder zeigen den bisher nicht beachteten Strahlengang in einer Ebene, die senkrecht zur Symmetrieebene steht. Bei allen Figuren wurde der gleiche Ablenkwinkel  $\Phi = 50^\circ$  angenommen und nur der Winkel zwischen der Polschuhbegrenzung und dem austretenden Strahl verändert. Bei der Bildfolge 4—8

<sup>5)</sup> Daher konnte *H. Marshall*, Physikal. Z. 45, 1 (1944), der zwar räumliche Bündel, jedoch nur bei senkrechtem Ein- und Austritt untersuchte, diesen Effekt nicht finden. Eine ähnliche Fokussierungseigenschaft berechnet auch *David L. Judd*, R. S. I. 21, 213 (1950). Sie findet bei senkrechtem Ein- und Austritt statt und wird durch eine radiale Feldabnahme verursacht.

wird der Winkel  $\varepsilon''$  kontinuierlich verkleinert. Die radiale Brennweite in der Symmetrieebene ist erst negativ, wird dann unendlich und schließlich positiv und nimmt immer mehr ab. Die axiale Brennweite in der Ebene senkrecht dazu ist erst klein, wird dann immer größer und schließlich negativ. Die beiden Abb. 5 und 7 stellen reine Zylinderlinsen dar, u. zw. erfolgt bei Abb. 7 die Fokussierung in bekannter Art in der Symmetrieebene, bei Abb. 5 jedoch senkrecht dazu. Abb. 6 stellt eine Feldanordnung dar, bei der beide Brennpunkte zusammenfallen; sie entspricht im wesentlichen einer sphärischen Linse; da jedoch die Hauptpunkte an verschiedenen Stellen liegen, ist die Vergrößerung in beiden Richtungen verschieden. In Abb. 4 wirkt das Feld in der Symmetrieebene zerstreuernd und senkrecht dazu sammelnd; bei Abb. 8 ist es umgekehrt.

Obige Betrachtung über die Linsenwirkung des Streufeldes machten wir für jene Stelle, wo der Strahl das Feld verläßt. Eine ganz analoge Betrachtung kann man jedoch auch für die Eintrittsstelle ausführen. Da bei gleichzeitigem Vertauschen der Strahl- und der Feldrichtungen die Bahnen ungeändert bleiben, gilt Formel (8) auch für die Eintrittsstelle. Wir bezeichnen den Winkel zwischen der Strahlrichtung und der Normalen zur Feldbegrenzung an der Eintrittsstelle als Eintrittswinkel  $\varepsilon'$  und jenen an der Austrittsstelle als Austrittswinkel  $\varepsilon''$ . Beide werden dann positiv gezählt, wenn sich die vom Feldrand nach außen gezogene Normale gleich vom Mittelpunkt der Kreisbahn entfernt. (Siehe Abb. 4—6.) Bezeichnen wir die Brennweite des Streufeldes an der Eintrittseite mit  $f_1$  und jene an der Austrittseite mit  $f_2$ , so ist:

$$f_1 = a \cdot \cotg \varepsilon' \quad \text{und} \quad f_2 = a \cdot \cotg \varepsilon''. \quad (8)$$

Diese beiden dünnen Linsen befinden sich im Abstand  $a \cdot \Phi$  voneinander; ihre Wirkung ist gleich der einer Ersatzlinse, deren Kardinalpunkte sich aus jenen Formeln berechnen lassen, die aus der geometrischen Optik bekannt sind<sup>6)</sup>. Wir finden so für den Abstand der Brennpunkte vom Feldrand

$$G' = \frac{f_1(f_2 - a\Phi)}{f_1 + f_2 - a\Phi} = a \cdot \frac{\cotg \varepsilon' [(\cotg \varepsilon'') - \Phi]}{(\cotg \varepsilon' + \cotg \varepsilon'') - \Phi};$$

$$G'' = \frac{f_2(f_1 - a\Phi)}{f_2 + f_1 - a\Phi} = a \cdot \frac{\cotg \varepsilon'' [(\cotg \varepsilon') - \Phi]}{(\cotg \varepsilon'' + \cotg \varepsilon') - \Phi} \quad (9)$$

und für die Brennweite

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - a\Phi} = a \cdot \frac{\cotg \varepsilon' \cotg \varepsilon''}{(\cotg \varepsilon' + \cotg \varepsilon'') - \Phi}. \quad (10)$$

<sup>6)</sup> Handbuch der Physik, Bd. 18, S. 38.

In obigen Formeln ist  $G'$ , bzw.  $G''$  dann positiv, wenn der entsprechende Brennpunkt außer dem Feld liegt. Ferner ist die Brennweite  $F$  positiv für Sammellinsen und negativ für Zerstreuungslinsen. Für die numerische Auswertung sind folgende Formeln bequemer:

$$\frac{a}{G'} = \operatorname{tg} \varepsilon' - \frac{1}{\Phi - \cotg \varepsilon''}; \quad (9')$$

$$\frac{a}{G''} = \operatorname{tg} \varepsilon'' - \frac{1}{\Phi - \cotg \varepsilon'};$$

$$\frac{a}{F} = \operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon'' - \Phi \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg} \varepsilon''. \quad (10')$$

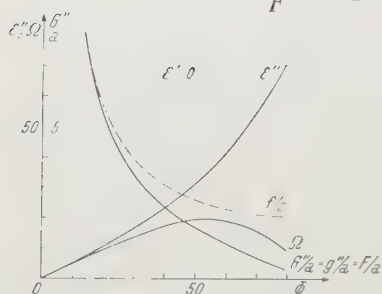


Abb. 9. Lage der Kardinalpunkte bei senkrechtem Eintritt.

Vergleichen wir abschließend die Formeln (2) und (8), so sehen wir, daß die Linsenwirkung des keilförmigen Streufeldes allein, in der Symmetrieebene und senkrecht dazu dem Betrage nach gleich groß ist. Wenn jedoch das Streufeld in der Symmetrieebene sammelnd wirkt, so wirkt es senkrecht dazu zerstreudend und umgekehrt.

### III. Spezialfälle.

In diesem Zusammenhang sind vor allem jene Feldanordnungen von besonderem Interesse, die ähnlich wie eine sphärische Linse wirken.

A. *Senkrechter Einfall* ( $\varepsilon' = 0$ ). Hierfür erhält man aus den Gl. (3') und (9'):

$$a/g'' = \operatorname{tg} \Phi - \operatorname{tg} \varepsilon''; \quad a/G'' = \operatorname{tg} \varepsilon''.$$

Die Brennpunkte fallen zusammen, wenn  $g'' = G''$  ist, was dann der Fall ist, wenn

$$\operatorname{tg} \Phi = 2 \operatorname{tg} \varepsilon''. \quad (11)$$

Bezeichnet man mit  $\Omega$  den Winkel zwischen den Polschuhbegrenzungsflächen, so ist allgemein

$$\Omega = \Phi - \varepsilon' - \varepsilon''. \quad (12)$$

Abb. (9) zeigt einerseits, wie  $\varepsilon''$ , bzw.  $\Omega$  von  $\Phi$  abhängen. Es ist bemerkenswert, daß  $\Omega$  bei  $\Phi = 54^\circ$  den maximalen Wert  $19,3^\circ$  annimmt. Das heißt, daß nur dann die beiden Brennpunkte zur Deckung gebracht werden können, wenn der Winkel



zwischen den Polschubbegrenzungsflächen kleiner als  $19,3^\circ$  ist. Gibt man dem Winkel  $\Omega$  gerade diesen Grenzwert, so erreicht man, daß für einen größeren Bereich von  $\Phi$  die Brennpunkte zusammenfallen, daß sich also beide Kaustiken berühren. Abb. 9 zeigt andererseits auch, wie die Lage der Brennpunkte und die Brennweite vom Ablenkwinkel  $\Phi$  abhängen. Der Unterschied der Brennweiten in und senkrecht zur Symmetrieebene wird bei größeren Ablenkwinkeln sehr beträchtlich. Da nur die hinteren Brennpunkte und nicht auch die vorderen zusammenfallen, wird nur von einem unendlich fernen Objekt ein einziges Bild entstehen. Die Abbildung eines endlichen Objektes wird astigmatisch sein; sie kann jedoch durch Veränderung von  $\varepsilon''$  anastigmatisch gemacht werden.

**B. Symmetrischer Strahlengang** ( $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$ ). Es wurde wieder die Lage der Brennpunkte aus den Gl. (3') und (9') berechnet und in Abb. 10 dargestellt. Die gestrichelten Kurven beziehen sich auf die Abbildung in der Symmetrieebene, die voll ausgezogenen Kurven auf die neue Abbildung senkrecht dazu. Bei jenen Anordnungen  $(\Phi, \varepsilon)$ , wo sich die entsprechenden ausgezogenen und gestrichelten Kurven schneiden, fallen die Brennpunkte zusammen. Diese Spezialfälle wurden in Abb. 11

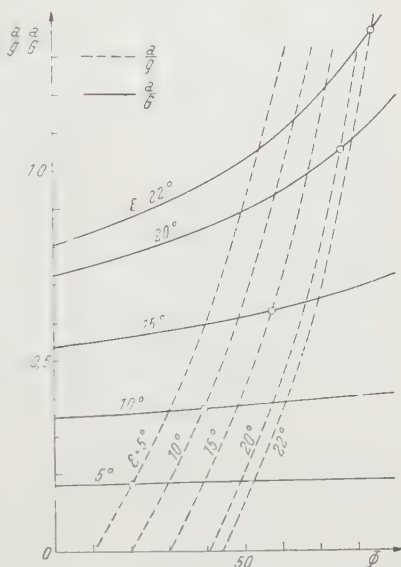


Abb. 10. Lage der Brennpunkte bei symmetrischem Strahlengang.

näher untersucht. Wir sehen hieraus, daß ein fast linearer Zusammenhang zwischen  $\varepsilon$ ,  $\Omega$  und  $\Phi$  besteht. Die Abhängigkeit der Lage der Brennpunkte von  $\Phi$  ist ähnlich wie bei Abb. 9, doch ist hier der Unterschied zwischen den beiden Brennweiten wesentlich geringer. Bei kleinen Ablenkwinkeln sind die aus den Abb. 9 und 11 entnommenen Werte von  $\Omega$  sowie  $G''/a$  praktisch gleich; die Brennweite ist daher vom Einfallswinkel (solange dieser klein ist) unabhängig, vorausgesetzt, daß das Feld als Ganzes ( $\Omega = \text{const.}$ ) gegen den einfallenden Strahl geschwenkt wird.

Verwendet man derartige Felder beim Elektronenmikroskop, so ist bei dünnsten Präparaten ein wesentlich größerer Bildkontrast zu erwarten, da alle Elektronen, die im Präparat einen Geschwindigkeitsverlust erleiden, wesentlich stärker abgelenkt



fokussierende Massenspektrographen nur dann durch besonders einfache Verhältnisse, wie ebene Polschuhbegrenzung und ebene photographische Platte, aus, wenn die Verlängerung der Polschuhbegrenzung an der Austrittseite durch jene Stelle geht, wo der Strahl das Feld betritt. (Siehe Abb. 12.) Die Bedingung hierfür lautet:

$$\varepsilon'' = -(\pi/2 - \Phi/2). \quad (13)$$

Es wird nachstehend auch in diesem Falle untersucht, welchen Wert der Eintrittswinkel  $\varepsilon'$  haben muß, damit die beiden hinteren Brennpunkte zusammenfallen. Setzt man Gl. (13) in die Gl. (3') und (9') ein, so erhält man:

$$\frac{a}{g''} = \operatorname{tg}(\Phi - \varepsilon') + \cotg \frac{\Phi}{2}; \quad (14)$$

$$\frac{a}{G''} = -\cotg \frac{\Phi}{2} - \frac{1}{\Phi - \cotg \varepsilon''}. \quad (15)$$

In Abb. 13 sind diese Funktionen graphisch dargestellt. Auch in diesem Falle wurden die Schnittpunkte beider Kurvenscharen (für die also  $g'' = G''$  ist) in Abb. 14 näher untersucht. Man sieht hieraus, daß  $\varepsilon'$  größer als  $26^\circ 15'$  sein muß, damit der Brennpunkt außerhalb von dem Feld liegt. Bei zunehmendem

$\varepsilon'$  und abnehmendem  $\Phi$  wächst  $g''$  erst rascher und später nur mehr unbedeutend an. Praktisch werden kleine Ablenkwinkel  $\Phi$ , wegen dem zu streifenden Austritt, kaum zu brauchen sein, wenn sich auch gerade diese Fälle durch besonders große Dispersion bei kleinem Magneten auszeichnen. Dagegen sind jene Anordnungen, bei denen  $g''$  klein ist, praktisch am wertvollsten. Auf die Anwendungen in der Massenspektroskopie und Elektronenmikroskopie wird demnächst in einer eigenen Arbeit ausführlich eingegangen werden.

In Anbetracht der zahlreichen weitgehenden Vernachlässigungen, die zur Ableitung des einfachen Resultates nötig waren, schien es angebracht, eine experimentelle Überprüfung durchzuführen. Es ergab sich hierbei dann eine gute Übereinstimmung mit der Theorie, wenn auf eine einwandfreie Abschirmung des Streufeldes geachtet wurde. Bei kleiner Aperturblende übertraf die Güte der Abbildung alle Erwartungen. Sogar bei ganz weiter Aperturblende ( $8/10$  des Polschuhabstandes), wobei die höheren Glieder der *Taylor*-Reihe sicher nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, war die Abbildung noch so gut, daß sie für Spektro-

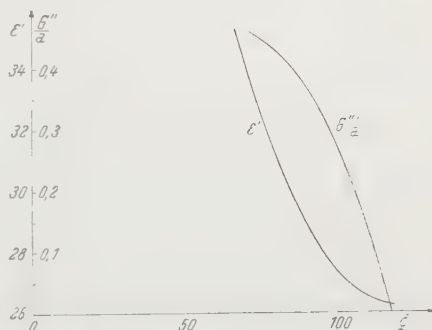


Abb. 14. Eintrittswinkel und Lage des rückwärtigen Brennpunktes für eine Polschuhform nach Abb. 12, bei der der rückwärtige radiale Brennpunkt mit dem axialen Brennpunkt zusammenfällt.

graphen zur Isotopentrennung ausreichend wäre. Gerade hierfür ist der Intensitätsgewinn durch die zusätzliche Fokussierung von entscheidender Bedeutung. Ein ausführlicher Bericht über diese experimentelle Untersuchung wird demnächst erscheinen.

Es ist mir ein Bedürfnis, Herrn Prof. Dr. *Ehrenhaft* für das große Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, sowie für seine tatkräftige Unterstützung mit allen Hilfsmitteln des Instituts meinen wärmsten Dank auszusprechen.

# Überlegungen zur Ehrenhaftschen Magneto-Photophorese.

Von

**Frank C. Roesler.**

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Graz.

(Eingelangt am 4. Juli 1950.)

## Zusammenfassung.

Anschließend an die Diskussion einer Arbeit von *J. A. Schedling* wird gezeigt, daß die Hypothese einer körperfesten, den suspendierten Teilchen durch Wechselwirkung mit den Gasmolekülen eingepprägten Kraft die bei der Magneto-Photophorese auftretenden Bahnformen zwanglos erklärt. Bei sehr kleinen *Reynoldsen* Zahlen (Verschwinden der Trägheitskräfte) und in Abwesenheit von Störungen durch Schwankungsvorgänge beschreibt ein suspendiertes Teilchen unter dem Einfluß einer körperfesten Kraft eine schraubenförmige Bahn: besitzt das Teilchen ein Dipolmoment, so kann ein äußeres Feld diese Bahn stabil machen, und sie verläuft dann entlang der magnetischen Kraftlinien des äußeren Feldes.

Will man durch Wechselwirkung mit den Gasmolekülen entstehende Kräfte als Ursache der Bewegungen ausschließen, dann darf keine Energie am Teilchen zerstreut werden. Die Experimente der *Ehrenhaftschen* Schule genügen dieser Forderung nicht.

## 1. Einleitung.

Beobachtet man Aerosole gewisser Ferromagnetika mittels eines Mikroskops bei intensiver, seitlicher Beleuchtung, dann bemerkt man bei einzelnen Teilchen systematische Bewegungen auf schraubenförmigen Bahnen entlang der magnetischen Kraftlinien, die einen geraden, stromführenden Leiter umschließen<sup>1</sup>). Bei Umkehrung des magnetischen Feldes kehrt sich auch die Bewegung der Teilchen um, jedoch ist die Geschwindigkeit nicht der Feldstärke proportional, sondern nähert sich bei größeren Feldstärken einem konstanten Wert. Unter anderen Versuchsbedingungen, nämlich dann, wenn die Fallbewegung der Teilchen stark ausgeprägt ist, lassen sich gewisse Bewegungen in Feldrichtung auch bei Dunkelheit nachweisen<sup>2</sup>).

<sup>1</sup>) *J. A. Schedling*, Acta Physica Austriaca 4, 98 (1950). Dasselbst Hinweise auf zahlreiche frühere Arbeiten von *F. Ehrenhaft* und Mitarbeitern.

<sup>2</sup>) *J. A. Ferber*, Acta Physica Austriaca 4, 133 (1950).



Eine Erklärung dieser eigenartigen Erscheinungen steht noch aus. Die *Ehrenhaftsche* Schule, welche die angeführten Ergebnisse unter dem Aufwand großer Experimentierkunst gewonnen und ausgebaut hat, neigt im allgemeinen zu der Meinung, sie seien nicht in den Rahmen der bekannten Gesetzmäßigkeiten einzuordnen. Herr *Schedling* hat in der zitierten Untersuchung auch die Hypothese einer körperfesten Kraft als Ursache der systematischen Bewegungen besprochen. Er nahm versuchsweise an, daß unter dem Einfluß der Beleuchtung dem Teilchen eine Kraft aufgeprägt ist, welche in ihrer Richtung mit derjenigen eines ebenfalls vorhandenen magnetischen Dipolmomentes zusammenfällt. Es sind dann sowohl systematische Bewegungen in Richtung der Kraftlinien als auch die „Kommutierbarkeit“ der Bewegung zusammen mit dem Felde qualitativ verständlich. Auf Grund eines Experimentes, bei dem das Teilchen unter dem Einfluß eines Wechselfeldes zwar als gerichtet erschien, trotzdem aber die systematische Bewegung *nicht* zeigte, sieht Herr *Schedling* sich indessen gezwungen, die erläuterte Hypothese einer körperfesten Kraft zu verwerfen.

Ich möchte in der vorliegenden Arbeit den Gedanken einer solchen Kraft als Ursache der beobachteten Phänomene weiterverfolgen. Zwar stimme ich mit Herrn *Schedling* vollkommen darin überein, daß der von ihm beschriebene Versuch ein experimentum crucis darstellt, welches bei entsprechendem Ausfall die zur Diskussion stehende Erklärung als unrichtig erweisen könnte. Es scheint mir jedoch, daß die tatsächlich bei dem Versuch obwaltenden Umstände es unmöglich machen, aus den bisher beobachteten Effekten einen definitiven Schluß zu ziehen.

## 2. Der Schedlingsche Wechselfeldversuch; Ähnlichkeitsbetrachtungen.

Das Teilchen wird<sup>1)</sup> zunächst mittels des von einem Gleichstrom herrührenden Feldes gerichtet; es zeigt die kommutierbare Bewegung. Dem Gleichstrom wird ein Wechselstrom überlagert und dann der Gleichstrom abgeschaltet. Das Teilchen behält seine Richtung bei und zeigt nur „kleine Oszillationen“; die systematische Bewegung fehlt, tritt aber sofort wieder auf, wenn dem Wechselstrom neuerlich ein Gleichstrom überlagert wird, und ist dann mit dem letzteren kommutierbar. Die Ursache des Nicht-Umkehrens wird in der Trägheit des Teilchens gesehen; offenbar wird angenommen, daß der Probekörper sich im Wechselfeld laufend ummagnetisiert, weil er mechanisch nicht zu folgen vermag.

Wir entnehmen der *Schedlingschen* Arbeit die folgenden Unterlagen. Das Teilchen ist länglich geformt,  $10^{-5}$  bis  $10^{-3}$  cm groß und wird durch Zerstäubung einer nicht näher beschrie-

benen Eisensorte im elektrischen Lichtbogen hergestellt. Seine magnetischen Eigenschaften (Remanenz, Koerzitivkraft) sind offenbar unbekannt. Die Intensität und spektrale Zusammensetzung der Beleuchtung wird nicht angegeben. Vom richtenden Feld wird gesagt, daß es etwa eine Größenordnung stärker als das Erdfeld ist, was also einigen Gauß, bzw. Örsted entspricht. Ich nehme an, daß der Versuch bei Atmosphärendruck angestellt wird.

Um bei diesen ziemlich unbestimmten Verhältnissen ein Urteil über die Bewegungsfähigkeit des Probekörpers zu gewinnen, dürfte vielleicht eine Ähnlichkeitsüberlegung geeigneter sein als eine direkte Rechnung unter Verwendung geschätzter Größen. Wir gehen von einem makroskopischen, länglich geformten Eisenkörper aus: man denke vielleicht an eine Kompaßnadel. Wir betrachten eine sie einschließende Mannigfaltigkeit von geometrisch ähnlichen Körpern aus gleichem Material und gleich stark magnetisiert; die Elemente der Mannigfaltigkeit unterscheiden sich also von der Kompaßnadel bezüglich aller Lineardimensionen um einen für das jeweilige Exemplar typischen Proportionalitätsfaktor. Ist *eines* der Elemente dieser Menge vollkommen definiert (etwa die Kompaßnadel), dann genügt die Angabe einer charakteristischen Länge  $L$  für ein beliebiges anderes, um es in jeder Beziehung zu kennzeichnen. Für die Elemente dieser Menge folgt aus der Ähnlichkeit:

Das Trägheitsmoment ist proportional der fünften Potenz der Linearabmessungen

$$\Theta \sim L^5. \quad (1)$$

Für das Drehmoment, welches vom gleichen äußeren Feld bei gleicher Winkellage ausgeübt wird, gilt

$$M_s \sim L^3. \quad (2)$$

Für das Drehmoment der Reibungskräfte gilt, wenn gleiches  $\nu$ , gleiche Winkelgeschwindigkeit und gleiche (kleine) *Reynoldsche* Zahl vorausgesetzt wird,

$$M_r \sim L^3. \quad (3)$$

Für die Hysteresisarbeit (Ummagnetisierung) gilt bei gleicher Periodenzahl und gleichem Feld

$$A_h \sim L^3. \quad (4)$$

Diese letzte Beziehung ist insoweit zweifelhaft, als sie die endliche, absolute Größe der *Weißschen* Bezirke nicht berücksichtigt. Man möchte glauben, daß für sehr kleine Teilchen der Exponent in (4) kleiner wird.

Die angeschriebenen Beziehungen sind elementar abzuleiten; ich möchte dafür keinen Raum opfern. Wir untersuchen den

für die Winkelbeschleunigung charakteristischen Ausdruck  $M_S$  (→) und finden

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sim L^{-2}. \quad (5)$$

Diese Winkelbeschleunigung ist entscheidend dafür, ob das Teilchen einem Wechselfeld bestimmter Frequenz folgen kann oder nicht. Die Eigenschwingungszahl des dipolbehafteten Teilchens in dem konstanten äußeren Feld  $S$  ist proportional der Wurzel aus der Winkelbeschleunigung — das folgt aus der Lösung der Schwingungsgleichung, man erinnere sich an die Pendel-Formel; es gilt

$$\nu \sim L^{-1}. \quad (6)$$

Es soll jetzt außer der Länge des Probekörpers auch die Magnetisierung variiert werden; sie sei z. B. durch die Intensität des Feldes  $\mathfrak{B}_p$  an den Endflächen (Spitzen, Pole) gemessen. (6) verallgemeinert sich dann zu

$$\nu \sim \mathfrak{B}_p^{1/2} L^{-1}. \quad (7)$$

Vom äußeren Feld hängt die Frequenz wie von  $\mathfrak{B}_p$  ab. Als Endformel haben wir schließlich zu diskutieren:

$$\nu \sim S^{1/2} \mathfrak{B}_p^{1/2} L^{-1}. \quad (8)$$

Mit Hilfe von (8) kann man, von einem Modellversuch ausgehend, auf die Schwingungsdauer der von *Schedling* beobachteten Teilchen schließen. Ich habe die Eigenschwingungszeit (Dauer einer *vollen* Periode) im Erdfeld (Horizontalkomponente) für eine Reihe von Magneten und kleinen Stabmagneten bei großem Ausschlag gemessen. Die Form des Körpers und auch die Stärke der Magnetisierung war bei den einzelnen untersuchten Objekten stark verschieden, nachfolgend ist nur die Länge festgehalten, die Summe der Ausschläge aus der Ruhelage nach beiden Seiten war  $\approx 270^\circ$ .

Objekt	Länge $l$ in cm	Schwingungsdauer $T$ in Sekunden
<i>a</i>	20	13
<i>b</i>	20	12,5
<i>c</i>	14	11
<i>d</i>	14	10
<i>e</i>	12,5	7,8
<i>f</i>	11	8,5
<i>g</i>	9	8
<i>h</i>	6,5	3,7
<i>i</i>	6	5,5

Die „spezifische Frequenz“ Länge/Schwingungsdauer ist am *kleinsten* für die Objekte *g* und *i*, sie liegt bei beiden etwas

über 1. Ich will auf 1 abrunden und diese Zahl für  $L T = L \cdot v$  als Basis für die Abschätzungen wählen. Die Eigenschwingungszahl eines ähnlichen Probekörpers in einem zehnmal stärkeren äußeren Feld beträgt nach (8)

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } L = 10^{-3} \text{ cm: } 3170/\text{sec}, \\ \text{für } L = 10^{-4} \text{ cm: } 31700/\text{sec}, \\ \text{für } L = 10^{-5} \text{ cm: } 317000/\text{sec}. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Das gilt für gleiches  $\mathfrak{B}_p$ . Nimmt man an, daß die Probekörper 100mal schwächer magnetisiert sind als der makroskopische Magnet, dann werden die entsprechenden Eigenschwingungszahlen nach (8) zehnmal kleiner: das ergibt immer noch 317 sec, 3170 sec und 31700 sec. Es ist deshalb schwer zu glauben, daß die Trägheit der von Herrn *Schedling* beobachteten Probekörper sie daran hindern konnte, einem Wechselfeld mit 50 Perioden sec zu folgen. Das wäre nur möglich, wenn die Periodenzahl des Feldes die Eigenfrequenz überträfe.

Die Größe  $\mathfrak{B}_p$  spielt in der Abschätzung eine ausschlaggebende Rolle. Man könnte sie überschlägig ermitteln, wenn beim Experiment darauf geachtet würde, wie groß die Feldstärke des äußeren, richtenden Feldes mindestens sein muß, damit es trotz der thermischen Schwankungen zu einer deutlichen Orientierung des Probekörpers kommt. Das Drehmoment des äußeren Feldes ist

$$M_S = \Phi \cdot S \cdot L = \mathfrak{B}_p \cdot F_p \cdot S \cdot L = \mathfrak{B}_p \cdot S \cdot c \cdot L^3,$$

wobei  $c$  eine für die Form des Teilchens charakteristische Konstante vorstellt, die bei einem Würfel 1 beträgt und bei nadelförmigen Teilchen vielleicht  $\frac{1}{50}$  ausmachen kann. Nach dem *Boltzmannschen*  $e$ -Satz wird für den mittleren Winkel der Nadel zur Feldrichtung gelten

$$\bar{\alpha} \cdot M_S \approx k T.$$

Wir setzen bei beobachteter stabiler Orientierung

$$M_S \cdot \pi/2 \approx n \cdot k T > k T; \quad n = 5 \dots 10.$$

Die Werte, welche man daraus für  $\mathfrak{B}_p$  ermitteln kann, sind proportional mit  $L^{-3}$ ; reicht beispielsweise zur Orientierung bereits das Erdfeld aus, so liegen sie für nadelartige Teilchen in der Größenordnung von 1 Gauß bei  $L = 10^{-3}$  cm, 1000 Gauß bei  $L = 10^{-4}$  cm usw. *Kleine* Teilchen werden deshalb erst in ziemlich starken Feldern gerichtet sein, weil die andernfalls notwendigen hohen  $\mathfrak{B}_p$  kaum auftreten können<sup>3)</sup>. Im übrigen sieht

3) Das ist von großem Interesse im Zusammenhang mit der weiter unten besprochenen Abhängigkeit der Bewegungsgeschwindigkeit von der Feldstärke. Zur oberen Grenze für  $\mathfrak{B}_p$  ist zu sagen, daß man die Möglichkeit zu berücksichtigen hat, ein Teilchen bestehe aus einem einzigen *Weißschen* Bezirk. Dann können die  $\mathfrak{B}_p$  sehr hoch sein.



man: Falls die Probekörper überhaupt in schwächeren Feldern orientiert werden, folgen auch bei den größeren ( $L = 10^{-3}$  cm) Teilchen Werte für  $\mathfrak{B}_p$ , die ausreichen, um Kräfte zu liefern, die bei einer Feldfrequenz von 50 Perioden das Teilchen mitdrehen. Zum gleichen Ergebnis führt folgende Überlegung: Die Felddichte im Eisen wird nicht *kleiner* sein als die in der umgebenden Luft. Dort beträgt sie aber bei den angegebenen Versuchsbedingungen einige Gauß, also dürfte die zweite der oben für die Eigenfrequenzen angeführten Ziffernreihen untere Grenzen geben.

Außer der Trägheit haben die magnetischen Kräfte auch die Luftreibung des Teilchens zu überwinden, wenn dieses dem Felde folgen soll. Ob sie das können, läßt sich nicht gut durch Modellversuche entscheiden; die verschiedenen Ähnlichkeitsbedingungen — unter anderem muß auch das Verhältnis der mittleren, freien Weglänge zu den Abmessungen des Probekörpers gewahrt werden — führen insgesamt zu einer Versuchsanordnung, bei der die nicht auszuschaltende Lager- oder Aufhängereibung einer makroskopischen Magnetnadel eine zu große Rolle spielen würde. Wir können deshalb nur eine *sehr* rohe Abschätzung ausführen. Man muß einleitend sagen, daß bei den kleinen Teilchen die Reibung viel mehr ausmacht als die Trägheit; schon der Vergleich von (2), (3) und (1) zeigt, daß im Gegensatz zu der rascher verschwindenden Trägheit die magnetischen und die Reibungsmomente von der gleichen Potenz der Längen abhängen.

Die Hydromechanik liefert für das Bremsmoment der Reibung bei einem kugelförmigen Teilchen

$$M_r = 8 \pi \cdot \omega \cdot \eta \cdot r^3.$$

Bildet man den Bruch  $M_S/M_r$ , wobei wir in  $M_S$  für eine Kugel  $c = 1$  setzen, so kommt

$$M_S/M_r = \mathfrak{B}_p \cdot \mathfrak{S} / \omega \pi \eta.$$

Dieser Bruch, gleich 1 gesetzt, definiert eine untere Grenze für  $\mathfrak{B}_p$ . Sie hängt nicht von  $L$  ab und liegt für  $\mathfrak{S} = 1 \text{ A/cm}$  ( $\approx$  Schedlingsche Bedingungen) bei rund 2 Gauß, d. h. befriedigend tief.

Wir vermuten nach allem Obigen, daß der von Herrn *Schedling* beobachtete Probekörper dem Feld *doch* gefolgt ist, u. zw. so rasch, daß es bei den beschränkten Beobachtungsmöglichkeiten optisch nicht festzustellen war. Es ist nützlich, daran zu erinnern, daß man bei der Beobachtung von Teilchen mit *Brownscher* Bewegung niemals die *wirkliche* Bewegung sieht und doch subjektiv den Eindruck hat, ein scharf abgebildetes Objekt zu betrachten.



Die prinzipielle Bedeutung des von Herrn *Schedling* erdachten Versuches ist groß. Man möchte wünschen, daß er unter geeigneteren Bedingungen und bei genau festgehaltenen Umständen wiederholt wird, d. h. vor allem bei viel höherer und kontinuierlich variiertter Frequenz und an einem Teilchen, dessen Größe und Gestalt zu bestimmen ist. Auch die Strom-, bzw. Feldstärken müssen genauer bekannt sein, wenn man Rechnungen anstellen will. Falls die Hypothese der körperfesten Kraft richtig ist, müssen systematische Bewegungen auch in Mittel- oder Hochfrequenzfeldern auftreten. Das ist zu erwarten, wenn 1. bei überlagertem Gleichstrom sich eine systematische Bewegung zeigt und 2. der Probekörper im reinen Wechselfeld gerichtet bleibt.

### 3. Diskussion der Bahnformen.

Wir nehmen mit Herrn *Schedling* an, daß unter dem Einfluß der Beleuchtung dem Teilchen eine Kraft eingeprägt ist, welche in ihrer Richtung relativ zum Teilchen festliegt. Sie soll nicht explizite von der Zeit abhängen. Die Frage nach der Natur dieser Kraft stellen wir einstweilen zurück; einige Bemerkungen dazu finden sich in § 4. Über die Lage der Kraft im Bezugssystem des Teilchens machen wir keine speziellen Annahmen, so daß also im allgemeinen Verschiebung und Drehung je drei Komponenten besitzen. Lage und Orientierung des Teilchens seien durch allgemeine Koordinaten  $q_k$  gegeben. Seine Bewegung wird durch die für Kräfte ohne Potential verallgemeinerten *Lagrangeschen* Gleichungen zweiter Art beherrscht:

$$d/dt [\partial L / \partial \dot{q}_k] - \partial L / \partial q_k = A_k - R_k. \quad (10)$$

Der Ausdruck  $A_k$  rechts bedeutet die eingeprägte äußere Kraft,  $R_k$  die Reibung. Von der potentiellen Energie wollen wir annehmen, daß sie verschwindet, daß also links  $L = T - V = T$  wird. Das Magnetfeld kommt im Ansatz (10) nicht vor. Bekanntlich ist die Integration der Gleichung (10) nicht allgemein möglich. Um überhaupt etwas herauszulesen, werden wir eine drastische Vereinfachung vornehmen. Man entnimmt aus der *Schedlingschen* Arbeit<sup>1)</sup>, bzw. den darin enthaltenen Abbildungen, daß die systematischen Geschwindigkeiten zwischen  $10^{-4}$  und  $10^{-2}$  cm/sec liegen, die Schraubenbahnen Radien der Größenordnung  $1 \cdot 10^{-3}$  cm besitzen und daß die systematische Horizontalbewegung etwa das Fünffache der Fallbewegung ausmacht. Damit läßt sich das Verhältnis der Trägheitskräfte (Zentrifugalkraft) zu der Schwerkraft und das der letzteren zu den Antriebskräften abschätzen. Man ermittelt, daß die Trägheitskräfte um etwa drei Größenordnungen (rd. 1000mal) kleiner

sind als Antriebs- und Reibungskräfte. (Das Verschwinden der Trägheitswirkungen gegenüber der Reibung bei sehr kleinen Teilchen folgt auch aus der Ähnlichkeitsbetrachtung in § 2.) Man wird deshalb für eine Näherung die linke Seite von (10) überhaupt streichen und

$$A_k - R_k = 0 \quad (11)$$

setzen. Die  $A_k$  sind Funktionen der  $q_k$ , während in den  $R_k$  auch die  $\dot{q}_k$  auftreten. Unsere Aufgabe besteht im Prinzip darin, die  $\dot{q}_k$  zu ermitteln, wenn die  $A_k$  gegeben sind, und auf die Bahnform zu schließen. Die invariante Bedeutung von (11) ist, daß sich in jedem Zeitaugenblick, an jedem Bahnpunkt Antriebs- und Reibungskräfte das Gleichgewicht halten. In Verbindung mit der Annahme, daß die Antriebskraft körperfest ist und nicht explizite von  $t$  abhängt, folgt daraus, daß kein Punkt der Bahn und kein Zeitaugenblick ausgezeichnet ist: alle *invarianten* Merkmale der Bahnkurve müssen von Punkt zu Punkt gleichbleiben. Nachdem diese invarianten Merkmale einer Raumkurve durch Krümmung und Windung gegeben sind, muß die Bahnkurve konstante Krümmung und Windung besitzen. Die möglichen Bahnformen sind also Schraubenlinien — einschließlich der ausgearteten Formen des Kreises und der Geraden.

Die Schlußfolgerung ist trotz der verbalen Formulierung exakt. Der Deutlichkeit halber ergänzen wir sie durch eine Rechnung. Dazu gehen wir am besten zur vektoriellen Schreibweise über: aus (11) wird

$$\vec{K} - \vec{v}R = 0, \quad \vec{M} - \vec{w}S = 0. \quad (12a, b)$$

Dabei bedeutet  $\vec{v}$  den Geschwindigkeits-,  $\vec{w}$  den Winkelgeschwindigkeitsvektor,  $\vec{K}$  die Antriebskraft,  $\vec{M}$  das Antriebsmoment.  $R$  und  $S$  sind die Konstanten der Reibung für Translation und Drehung, beide Größen können Tensorcharakter haben, d. h. es braucht nicht  $\vec{K} \parallel \vec{v}$  und  $\vec{M} \parallel \vec{w}$  zu sein. Die Bedingung, daß  $\vec{K}$  und  $\vec{M}$  körperfest und dem Betrag nach konstant sind, drückt sich folgendermaßen aus:

$$\dot{\vec{K}} = \vec{w} \times \vec{K}, \quad \dot{\vec{M}} = \vec{w} \times \vec{M}. \quad (13a, b)$$

Auch die Tensoren  $R$  und  $S$  sind entsprechend ihrer Bedeutung „körperfest“, d. h. ihre Komponenten in einem körperfesten System sind konstant. Deshalb sind endlich auch  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  körperfest und erleiden die gleiche Transformation infolge der Bewegung wie  $\vec{K}$  und  $\vec{M}$ :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{w} \times \vec{v}, \quad \dot{\vec{w}} = \vec{w} \times \vec{w}. \quad (14a, b)$$

Man bucht als erstes Ergebnis

$$\vec{w} = \text{konstant},$$

weil die rechte Seite von (14b) verschwindet. Um (14a) zu deuten, zerlegen wir  $\vec{v}$  in eine Komponente  $\vec{v}_t$   $\vec{w}$  und eine Komponente  $\vec{v}_r \perp \vec{w}$ . Nachdem  $\vec{w} \rightarrow \vec{v}_t$  verschwindet, erhalten wir  $\vec{v}_t = \text{konstant}$ .  $\vec{v}_r \rightarrow \vec{w} \rightarrow \vec{v}_r$  steht senkrecht auf der durch  $\vec{v}_r$  und  $\vec{w}$  aufgespannten Ebene, ändert also den Betrag von  $\vec{v}_r$  nicht, sondern nur die Richtung;  $\vec{v}_r$  dreht sich also mit der gleichmäßigen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{v}_r \rightarrow \vec{v}_t$  im Kreise. Damit sind alle Bestimmungsstücke der Bewegung explizite gewonnen und die Schraubenbahn ist verifiziert. Geschwindigkeit und Bahnform hängen (außer von  $\vec{K}$ ) von den Größen  $R$  und  $S$ , d. h. von der Gestalt des Teilchens ab.

Es war bisher von dem Magnetfeld und seiner Rolle noch nicht die Rede, nach unserer Rechnung bewegt sich ein Teilchen, dessen Trägheit vernachlässigbar klein ist, unter dem Einfluß einer körperfesten Kraft *immer* auf einer Schraubenbahn. Es bleibt zu erklären, wieso die *Ehrenhaftschen* Probekörper erst bei Einschalten des Feldes mit solchen systematischen Bewegungen beginnen und wieso diese Bewegungen dann entlang der Kraftlinien verlaufen. Der erste Teil der Frage erledigt sich mit der Feststellung, daß für Teilchen der fraglichen Größe die zusätzlichen unregelmäßigen Rotationen infolge *Brownscher* Bewegung so bedeutend ausfallen<sup>4)</sup>, daß ständig neue Anfangsbedingungen für eine Schraubenbahn geschaffen werden und daß daher von jeder solchen Bahn nur ein unfeststellbar kurzes Stück durchlaufen wird. Die systematische Bewegung wird sich nur durchsetzen können, wenn ein äußeres Kraftfeld ein Richtmoment schafft, welches mit den Einflüssen der thermischen Schwankungen erfolgreich konkurrieren kann. Korrekterweise führen wir das Magnetfeld ein, indem wir links in (10) einen entsprechenden Term ergänzen. Das führt zu einer unübersichtlichen Rechnung, die nur für ein *starkes* Feld umgangen werden kann. Wir beschränken uns auf diesen Fall. Es sei die Achse des Dipolmomentes durch den Vektor  $\vec{m}$

<sup>4)</sup> Ein kugelförmiges, in Luft suspendiertes Teilchen mit  $r = 10^{-4}$  cm dreht sich bei Zimmertemperatur im Mittel während  $1/10$  sec um 74 Winkelgrade.

gegeben, und wir nehmen an, der Dipol sei durch das äußere Feld in einer gewissen Richtung starr festgehalten:

$$\vec{m} = \text{konstant.} \quad (15)$$

Der Probekörper kann sich dann nur um Achsen parallel zu  $\vec{m}$  drehen, es wird  $\vec{w} \parallel \vec{m}$ . Nachdem, wie oben abgeleitet,  $\vec{v}_t \parallel \vec{w}$  ist, wird deshalb die Achse der Schraubenbahn die Richtung der Kraftlinien haben. (Man durchschaut die Sachlage auch ohne Rechnung. Die an sich möglichen Bahnen sind schraubenförmig. Bei einer Helix gibt es nur eine ausgezeichnete Richtung, die der Achse. Für das Dipolteilchen ist der vom magnetischen Feld erfüllte Raum anisotrop; schon aus Symmetriegründen muß seine Bahnschraube achsenparallel zu den Kraftlinien sein.)

Zur Bedeutung der Vereinfachungen, welche wir einführen mußten, um das Modell mathematisch zugänglich zu machen: Nachdem die linke Seite von (10) nicht exakt verschwindet, wird die Bahn eine „Feinstruktur“ aufweisen, in der sie von der idealen Schraubenlinie abweicht. Das stimmt bekanntlich mit dem empirischen Befund überein. Man wird darauf gefaßt sein müssen, daß bei ähnlichen Bewegungen suspendierter Teilchen noch kompliziertere Bahnformen auftreten, wenn die Trägheitskräfte relativ größer sind, d. h. bei größeren systematischen Geschwindigkeiten der Probekörper. Die in Gleichung (15) enthaltene Annahme, das äußere Feld hielte den Dipol starr in einer bestimmten Richtung, kann auch schon deshalb nur für verhältnismäßig kräftige Felder genähert erfüllt sein, weil die thermischen Schwankungen die Orientierung des Teilchens stören: es muß ja die mittlere potentielle Energie des Dipols gleich  $kT$  sein. Die Auswirkungen auf die Bewegungsform sind nicht leicht quantitativ zu verfolgen; man wird vermuten, daß die Bahn unregelmäßiger wird. Andererseits wird es plausibel, daß die Geschwindigkeit der systematischen Bewegung durchaus nicht der Feldstärke proportional ist, sondern bei höheren Feldstärken einem konstanten Wert zustrebt. Die Geschwindigkeit kann nur steigen, solange die Orientierung nicht vollkommen ist; wird der Dipol vom Feld praktisch starr festgehalten, dann ist mit  $\vec{v}_t$  das Maximum erreicht. (Der von einer Reihe von Autoren beschriebene, manchmal auftretende sprunghafte Wechsel der Bewegungsform bei sehr hohen Feldstärken ist bei unserem Modell durch die Annahme zu verstehen, daß es sich dabei um Änderungen der Magnetisierung des Probekörpers handelt, welche die Achse des Dipolmomentes verlegen.)

Als Sonderfall ist noch die Bewegung unter dem Einfluß eines Wechselfeldes mit überlagertem Gleichfeld zu besprechen.



Bei *Schedling*, der in diesem Falle eine systematische Bewegung beobachtet hat<sup>1)</sup>, findet sich leider keine Angabe über die relative Stärke der erzeugenden Ströme. Wenn der Gleichstrom immer überwiegt, liegt kein neues Problem vor. Falls aber die Amplitude der Stromstärke des Wechselstromes die des Gleichstromes übertrifft, kehrt das resultierende Feld zeitweilig um. Nachdem unter diesen Bedingungen das Feld — und damit auch der Probekörper — ungleiche Verweilzeiten für die beiden Richtungen besitzt, könnte man es wohl verstehen, daß sich unter dem Einfluß von  $\vec{K}$  eine systematische Bewegung ausbildet. Allerdings wäre zu vermuten, daß die regelmäßige Schraube nicht zustande kommt, oder, zumindest, daß die Bahnform sich gegenüber der bei reinem Gleichstrom ändert. Dieser Effekt müßte sich bei Abschalten und Zuschalten des Wechselstromes beobachten lassen, sofern ein Teilchen gefunden wird, bei welchem für  $|2 \cdot I_{\text{eff}} \text{ (Wechselstrom)} > I \text{ (Gleichstrom)}|$  Bewegungen auftreten.

Schließlich erklärt das erläuterte Modell vielleicht auch die öfter beobachtete Zunahme der *Brownschen* Bewegung bei intensiver Beleuchtung<sup>5)</sup>, ein Effekt, der durch einfache Erwärmung anscheinend schwierig zu deuten ist und auf den die *Ehrenhaftsche* Schule mehrfach hingewiesen hat. Die eingepägten Kräfte sind nicht nur dann da, wenn ein zusätzlicher Richteffect (Magnetfeld) zu direkt beobachtbaren systematischen Bewegungen führt. Fehlt er, werden die von der Beleuchtung herrührenden Bewegungen ungeordnet und überlagern sich der *Brownschen* Bewegung. Wie man aus den *Schedlingschen* Angaben über die Geschwindigkeit ersieht, ist die Steigerung, welche die *Brownsche* Bewegung dadurch erfahren könnte, möglicherweise beobachtbar; allerdings darf man nicht annehmen, daß bei allen Stoffen oder bei allen Teilchen eines Stoffes unter dem Einfluß des Lichtes eingepägte Kräfte auftreten.

#### 4. Schlußbemerkung.

Die kinematischen Konsequenzen einer körperfesten Kraft entsprechen — soweit sie sich bei der komplizierten Sachlage mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln verfolgen lassen — den derzeit bekannten Merkmalen der beobachteten Erscheinungen. Das ist ein gewichtiges Argument dafür, die Ursache der absonderlichen Bewegungen zunächst in einer solchen Kraft zu suchen.

Die Resultante aller auf den suspendierten Probekörper wirkenden und auf Wechselwirkung mit den Gasmolekülen be-

<sup>5)</sup> Man vergleiche etwa die historische Übersicht in dem Buch von *G. L. De Haas-Lorentz*: Die *Brownsche* Bewegung und einige verwandte Erscheinungen, Braunschweig 1913.



ruhenden Kräfte kann von Null verschieden sein, wenn an seiner Oberfläche und in dem umgebenden Gas dissipative Prozesse ablaufen, die räumlich unsymmetrisch sind. Wird dem Probekörper auf irgendeine Weise, wie etwa durch Bestrahlung, Energie zugeführt, dann müssen solche dissipative Prozesse stattfinden. Ihre räumliche Symmetrie ist aber nur gewährleistet, wenn sowohl der Energie anliefernde Prozeß keine Richtung auszeichnet als auch der Probekörper bezüglich Gestalt, Aufbau und Oberflächenbeschaffenheit kugelsymmetrisch ist. Was sich stärker auswirkt, die Unsymmetrie der Energieanlieferung oder die durch die Eigenschaften des Körpers bedingte, hängt von den speziellen Bedingungen ab; mit körperfesten Kräften hat man es zu tun, wenn die Unsymmetrien der Dissipationsprozesse überwiegend von den Eigenschaften des Probekörpers selbst herrühren.

Wie gezeigt wurde, führt ein zusätzlicher Richteffekt, der z. B. durch die Wirkung eines äußeren Magnetfeldes auf ein mit Dipolmoment behaftetes Teilchen gegeben sein kann, bei körperfester Kraft zu systematischen Bewegungen des Probekörpers, die das Vorhandensein von Potentialkräften unbekannter Natur vortäuschen. Ein Probekörper im *energetisch abgeschlossenen* Raum kann im Falle thermodynamischen Gleichgewichtes keine systematischen Bewegungen ausführen; das widerspricht dem „principle of detailed balancing“, demzufolge die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$W(x \rightarrow x + dx) \quad \text{und} \quad W(x + dx \rightarrow x)$$

in diesem Falle gleich sein müssen. Soll daher *bei nicht abgeschlossenem System* ein Experiment zu dem zwingenden Schluß führen, daß die Bewegungsursache in neuen Potentialkräften zu suchen ist, dann muß bei Verwendung von nicht kugelsymmetrischen Probekörpern jegliche Zufuhr von Energie, die zu dissipativen Prozessen führen könnte, nachweislich so gering gehalten werden, daß ihre Wirkung neben jener der fraglichen Potentialkräfte vernachlässigbar ist. (Diese Forderung beinhaltet auch, daß bei Versuchen an fallenden Teilchen die Vertikal-komponente der Bewegung klein gegenüber der als „Effekt“ interpretierten horizontalen sein muß.) Verwendet man Tröpfchen, dann ist der Nachweis ihrer räumlichen Symmetrie, stofflichen Homogenität und zeitlichen Unveränderlichkeit zu erbringen.

# Zum Szilard-Chalmers-Effekt mit schnellen Neutronen.

Von

**Werner Rieder, Herbert Müller und Engelbert Broda.**

II. Physikalisches Institut der Universität Wien.

(Eingelangt am 3. Januar 1951.)

In mehreren Arbeiten<sup>1-5)</sup> ist der *Szilard-Chalmers*-Effekt am Mangan und am Arsen mit schnellen Neutronen untersucht worden. Es wurde geprüft, ob die Zerstörung des Permanganat-, bzw. Arsenat- und Arsenit-Ions beim Einfang schneller Neutronen mit größerer Ausbeute verläuft als beim Einfang langsamer Neutronen. Das Auftreten eines solchen Unterschiedes wäre ein Beweis dafür, daß die Ausbeute durch den Anregungszustand des Ions unmittelbar nach dem Einfang des Neutrons, nicht aber durch chemische Sekundärreaktionen nach Verlust dieser Anregungsenergie bestimmt wird. Ein Unterschied wurde tatsächlich beim Arsen, aber nicht beim Mangan beobachtet. Die Verschiedenheit des Verhaltens der beiden Ionen steht im Einklang mit den Schlüssen, die man aus der Abhängigkeit der Ausbeute bei diesen Ionen von den Bestrahlungsbedingungen bei ausschließlicher Verwendung langsamer Neutronen ziehen muß.

Die Deutung der Experimente konnte nur unter der Voraussetzung erfolgen, daß die Aktivierung des Mn und As im Versuche mit nicht abgebremsten Neutronen tatsächlich vorwiegend durch die schnellen Neutronen aus der verwendeten Radium-Beryllium-Quelle eintritt, daß also die Intensität der von der Quelle emittierten langsamen Neutronen zu klein ist, um das Ergebnis zu verfälschen. Eine quantitative Grundlage zur Diskussion dieser Voraussetzung wurde nun in letzter Zeit geschaffen<sup>6)</sup>. In eigens zu diesem Zweck angestellten Versuchen wurde die Emission von Neutronen des Bereiches 0—100 eV

1) E. Broda, J. Chim. physique **45**, 196 (1949).

2) W. Rieder, Acta Physica Austriaca **4**, 290 (1950).

3) E. Broda u. W. Rieder, J. chem. Soc. S 356 (1949).

4) W. Rieder, E. Broda u. J. Erber, Monatsh. Ch. **81**, 657 (1950).

5) H. Müller u. E. Broda, Monatsh. Ch. **82**, 48 (1951).

6) E. Giegerl, Dissertation, Wien (1950); E. Giegerl u. E. Broda, Nature, London, im Druck.

durch die Quelle geprüft. Die Methode beruhte auf der selektiven Absorption der Neutronen bestimmter Energiegruppen durch gewisse Elemente (Resonanz). Die erhaltenen Werte liegen eher zu hoch als zu niedrig, da jeweils nur die niedrigste Resonanzbande berücksichtigt werden konnte. Es wurde gefunden, daß die Emission im Bereich  $0-1$  eV  $1.52 \pm 0.76$ , im Bereich  $0.5-2.5$  eV  $1.20 \pm 0.17$  und im Bereich  $20-100$  eV  $1.01 \pm 0.36$  Neutronen/Sekunde/eV/Millicurie (mC) beträgt. Die Gesamtemission derartiger Quellen beträgt bekanntlich etwa 15.000 Neutronen (aller Energien)  $\text{sec}^{-1}\text{mC}^{-1}$ <sup>7)</sup>. Der verhältnismäßig langsame Abfall der Intensität mit steigender Energie zeigt übrigens, daß die langsamen Neutronen nicht durch Bremsung in der Quelle, sondern direkt in der Kernreaktion entstanden sind. Andernfalls wären nämlich — außerhalb des thermischen Bereichs — die beobachteten Intensitäten den Energien verkehrt proportional.

Die direkt von der Quelle kommenden schnellen, bzw. langsamen Neutronen (Intensitäten  $I_s$ , bzw.  $I_l \text{ sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{mC}^{-1}$ ) vermögen in der bestrahlten Probe des Mn oder As die Betaaktivitäten  $A_s$ , bzw.  $A_l$  zu induzieren:

$$A_s = I_s n \bar{\sigma}_s \quad (1)$$

$$A_l = I_l n \bar{\sigma}_l \quad (2)$$

$n$  ist die Zahl der Atome pro  $\text{cm}^2$  und  $\bar{\sigma}$  der mittlere effektive Wirkungsquerschnitt für den Einfang der Neutronen des betreffenden Energiebereiches.

Einfangquerschnitte für schnelle Neutronen sind der Energie verkehrt proportional<sup>8)</sup>. Für den vorliegenden Zweck soll mit einer mittleren effektiven Energie der schnellen Neutronen von 1 MeV gerechnet werden. Dieser Wert steht in grober Übereinstimmung mit den Messungen *Dunnings*<sup>9)</sup> an Rückstoßprotonen und den Messungen *Frl. Giegerls*<sup>6)</sup> mit Hilfe der Kernspaltung des Urans, die durch solche Neutronen hervorgerufen wird. Es ist auch ungefähr der Wert, den man erhält, wenn man die Gesamtaktivierung des Mn, bzw. As in unseren Versuchen den schnellen Neutronen zuschreibt, dann aus Gl. (1)  $\bar{\sigma}_s$  berechnet und aus dessen Wert nach<sup>8)</sup> auf die Energie schließt. Mit Neutronen von 1 MeV betragen die Zahlenwerte für Mn  $3.5 \cdot 10^{-27}$  und für As  $23 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ <sup>8)</sup>. Wegen des enormen Vorwiegens der schnellen Neutronen kann  $I_s$  für beide Elemente einfach gleich  $15.000 \cdot 4\pi$  gesetzt werden. Daher gilt:

$$A_s = 15.000 n \bar{\sigma}_s / 4\pi \quad (3)$$

<sup>7)</sup> S. Bauer, F. W. Fenning, H. F. Freundlich, L. Kowarski u. H. Seligman, British Atomic Energy Report (1942).

<sup>8)</sup> D. J. Hughes, W. D. B. Spatz u. N. Goldstein, Physic. Rev. 75, 1781 (1949).

<sup>9)</sup> J. R. Dunning, Physic. Rev. 45, 586 (1934).

Was nun  $I_l$  betrifft, so deuten die Zahlen Frl. *Giegers* auf eine wenn auch langsame Abnahme mit steigender Energie. Eine solche Abnahme muß ja auch angenommen werden, weil sonst ein Widerspruch mit der Gesamtemission entstehen würde. Da aber das Gesetz, nach dem diese Abnahme erfolgt, nicht bekannt ist, sei für den Zweck der vorliegenden halbquantitativen Überlegungen mit einem konstanten Wert der Emission je Energieband von Einheitsbreite von  $i = 1 \text{ sec}^{-1} \text{mC}^{-1} \text{eV}^{-1} \cdot 4 \pi r^2$  gearbeitet; dafür werde die Emission bei einer bestimmten willkürlich anzunehmenden Energie  $E_{\max}$  gänzlich „abgeschnitten“.  $\sigma_l$  für jede Energie sei einfach durch das sogenannte 1  $\nu$ -Gesetz bestimmt, d. h. es sei von den bei Mn und As ohnehin nicht sehr ausgeprägten Resonanzen abgesehen. Es gilt demnach

$$\sigma_E / \sigma_0 = E_0^{1/2} / E^{1/2}. \quad (4)$$

Unter  $E_0$  sei thermische Energie ( $140 \text{ eV}$ ) verstanden. Es folgt

$$A_l = (n i / 4 \pi r^2) \int_0^{E_{\max}} \sigma_E dE, \quad (5)$$

das heißt

$$A_l = n i \sigma_0 E_0^{1/2} E_{\max}^{1/2} / 2 \pi r^2 \quad (6)$$

und in Verbindung mit (3)

$$A_s / A_l = 7500 \bar{\sigma}_s / i \sigma_0 E_0^{1/2} E_{\max}^{1/2} \quad (7)$$

Die aus (7) erhaltenen Werte des Quotienten  $A_s / A_l$  mit zwei willkürlichen Werten von  $E_{\max}$  sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Werte für  $\sigma_0$  sind der Literatur<sup>10)</sup> entnommen.

Tabelle.

Element	$E_{\max}$ (eV)	$\sigma_0$ (cm <sup>2</sup> )	$\bar{\sigma}_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_s / A_l$
As	100	$4,2 \cdot 10^{-24}$	$23 \cdot 10^{-27}$	26
	1000	$4,2 \cdot 10^{-24}$	$23 \cdot 10^{-27}$	8
Mn	100	$10,7 \cdot 10^{-24}$	$3,5 \cdot 10^{-27}$	1,5
	1000	$10,7 \cdot 10^{-24}$	$3,5 \cdot 10^{-27}$	0,5

Offenbar ist also die Voraussetzung, daß bei Vermeidung eines Bremsmittels nur die schnellen Neutronen zur Aktivierung beitragen, beim As gut erfüllt. Weniger klar liegt das Mn. Immerhin halten wir auch die experimentellen Ergebnisse mit

<sup>10)</sup> L. Seren, H. N. Friedlander u. S. H. Turkel, Physic. Rev. **72**, 888 (1947).

diesem Element für gültig, da selbst bei  $A_s/A_t = 0,5$  ein Unterschied der Ausbeute hätte merklich sein müssen und außerdem die der vorliegenden Rechnung zugrunde gelegten Annahmen besonders ungünstig gewählt wurden.

Wir danken Herrn Professor *K. Przibram* für vielfache Förderung unserer Arbeit und Frau Professor *B. Karlik* für freundliche Überlassung der Neutronenquelle.



# Über die Photophorese, die wahre magnetische Ladung und die schraubenförmige Bewegung der Materie in Feldern.

Erster Teil.

Von

**Felix Ehrenhaft.**

I. Physikalisches Institut der Universität Wien<sup>1)</sup>.

Mit 21 Abbildungen.

(Eingelangt am 11. Juli 1950.)

In diesem Bericht über die neueren Arbeiten des Verfassers und seiner Schule soll von neuen Erscheinungen die Rede sein, die auf einem direkteren Beobachtung zugänglichen Gebiet als dem der heutigen Physik mit ihren vielen Elementarteilchen gefunden wurden. Objekte dieser Untersuchungen, an denen 47 Jahre gearbeitet wurde, sind kleine, freischwebende Materieteilchen, die gerade noch unmittelbar wahrgenommen werden können. Es werden die Gesetzmäßigkeiten ihrer Bewegungen studiert, wenn sie von konzentrierten Lichtstrahlen beleuchtet werden, wenn das Schwerfeld und fallweise elektrische oder magnetische Felder einzeln oder kombiniert einwirken. Gegebenenfalls sind die Bewegungen bei Lichtausschluß zu untersuchen. Die Resultate scheinen auf neue Wege zu führen.

## Die Methode.

Abb. 1 zeigt eine gebräuchliche *Ehrenhaft'sche* Apparatur, mit der man solche Mikrobeobachtungen durchführt. In der Zelle wird feine Materie suspendiert, von einer oder zwei Seiten beleuchtet und senkrecht hierzu im Dunkelfeld mikroskopisch oder mit einer Lupe beobachtet. Je nach Bedarf läßt sich in dem *Ehrenhaft'schen* Kondensator ein vertikales homogenes elektrisches Feld erzeugen, ferner ein vertikales oder horizon-

<sup>1)</sup> Bearbeitet nach dem Vortrag „Über die Unipolarität der Materie im magnetischen, elektrischen und Lichtfeld“, gehalten am 6. Dezember 1949 vor der Chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien. Bei der Neufassung wurde der Verfasser von *Hans Rohatschek* wesentlich unterstützt.

tales homogenes magnetisches Feld durch *Helmholtzsche* Spulen. Die mikroskopische Beobachtung der frei schwebenden Probekörper gestattet, Kräfte bis ca.  $10^{-12}$  Dyn zu messen. Mit herkömmlichen Methoden, die noch eine direkte Beobachtung zulassen (Mikrowaagen), kommt man dagegen äußerstens nur auf ca.  $10^{-6}$  Dyn. In Anbetracht der millionenfach größeren Empfindlichkeit ist es gar kein Wunder, wenn sich da Dinge offenbaren, von denen man bisher keine Ahnung hatte.

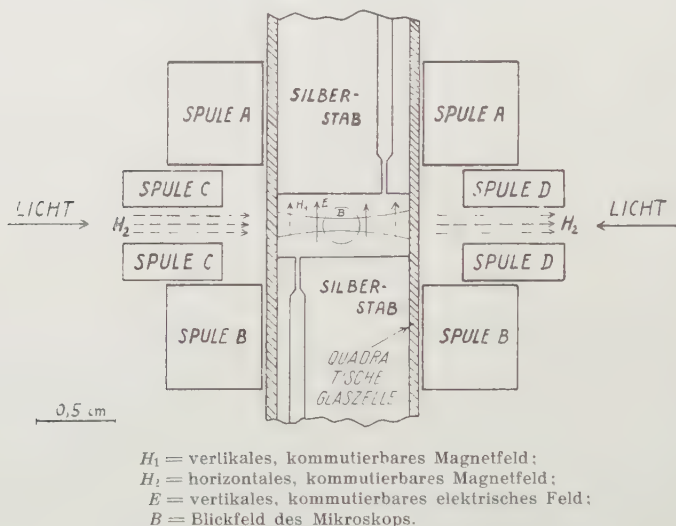


Abb. 1. Versuchsanordnung für Mikrobeobachtungen.

Man kann auch in größeren Räumen mit dem freien Auge oder mit der Lupe beobachten, indem man pulverförmige Materie in einem zu beliebigem Grad evakuierten Kolben aufschüttelt und diesen Raum mit konzentrierten Lichtstrahlen durchleuchtet. Das haben *R. Whytlaw-Gray* und *H. S. Patterson* an der Universität zu Leeds vor rund 20 Jahren mit Erfolg gemacht. Dieser Methode bedient man sich mit Vorteil, wenn man sich einen Überblick über die Erscheinungen verschaffen will.

## Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse.

### Photophorese.

In einem konzentrierten Lichtstrahl bewegen sich Materieteilchen gleicher physikalischer und chemischer Beschaffenheit teils in der Richtung der Fortpflanzung des Lichtes, teils in der entgegengesetzten Richtung (lichtpositive und lichtnegative

Photophorese [82, 94]<sup>2)</sup>. Die Erscheinung spielt sich in allen Gasen, insbesondere auch in Edelgasen (Argon), und bei allen Drucken ab: bisher hat man sie von 30 Atmosphären hinunter bis zu einem Vakuum von  $1.10^{-7}$  mm Hg beobachtet, wie im zweiten Teil näher ausgeführt wird. Der Inder *Satyendra Nat Ray* bewies, daß auch in Flüssigkeiten lichtpositive und lichtnegative Bewegungen auftreten [86]. Seine Versuche wurden von *W. W. Barakas* im *Porterschen* Laboratorium zu London überprüft und bestätigt [87]. Der letztere Autor hat auch in Röntgenstrahlen Photophorese gefunden. *G. Fachini* in Italien hat ebenfalls Photophorese in Flüssigkeiten festgestellt [91]. Diese Tatbestände werfen das Problem auf, ob bei der Photophorese außer eventuell vorhandenen sekundären Kräften, die durch Rückstoßeffekte infolge der Erwärmung des Körpers unter Mitwirkung des Gases (Radiometereffekte) entstehen mögen, einstweilen noch unbekannte primäre Kräfte wirken, die vom Licht unmittelbar auf die Materie ausgeübt werden [13].

### Elektro- und Magnetophotophorese.

Wird in dem Raum, wo Probekörper suspendiert sind, ein homogenes elektrisches Feld erregt, so gibt es Teilchen, die zur positiven Platte, und solche, die zur negativen Platte laufen. Kommutiert man das Feld, so kehren sich die Bewegungen um. Im Sinne von *Coulomb* und *Maxwell* bezeichnet man solche Körper als mit einem Überschuß an positiver oder negativer elektrischer Ladung behaftet. Die Ladung der Einzelteilchen kann gemessen werden [79]<sup>3)</sup>.

Fällt Strahlung auf ein Teilchen, so können bezüglich seiner elektrischen Eigenschaften folgende Fälle eintreten [3]:

a) Das Teilchen wird positiv elektrisch (normaler photoelektrischer Effekt) oder es wird negativ elektrisch aufgeladen (sogenannter inverser photoelektrischer Effekt [83, 88]). Es behält seine Ladung bis zu einer neuerlichen Belichtung unverändert bei.

b) Das Teilchen zeigt nur so lange, als es mit intensivem Licht bestrahlt wird, eine reversierbare Bewegung in oder gegen die Richtung des elektrischen Feldes. Da die Geschwindigkeit eine Funktion der Feldstärke und der Intensität des beleuchtenden Strahles ist, wurde diese Erscheinung als Elektrophotophorese bezeichnet [90].

<sup>2)</sup> Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis. Dieses wird mit dem in der nächsten Folge veröffentlichten zweiten Teil der Abhandlung abgedruckt.

<sup>3)</sup> Mit Hilfe dieser Methode wurde an Probekörpern, deren Größe, Kugelform und Dichte einwandfrei bestimmt war, das Auftreten von Ladungen unter dem Elementarquant festgestellt [1, 10]. (Aus ganz andersartigen Experimenten hat *J. Thibaud* neuerdings ebenfalls auf die Existenz von Ladungen weit unter dem Elementarquant geschlossen [103].)

Man hat also zwei Effekte zu unterscheiden, die an einem Körper auch kombiniert auftreten können: normale Ladungen, die, einmal erzeugt, auch im Dunkeln unverändert bleiben, und elektrophotophoretische Ladungen (positiv oder negativ), die unmittelbar von der momentanen Intensität der Beleuchtung abhängig sind und im Dunkeln verschwinden.

Legt man in analoger Weise ein homogenes Magnetfeld an, so beobachtet man, daß in hellem Licht Teilchen desselben Stoffes, derselben Form und Größe räumlich dicht benachbart teils nach Nord, teils nach Süd laufen und mit dem Feld reversieren, während man früher glaubte, daß ein homogenes magnetisches Feld Körper bloß richten, aber nicht von der Stelle bewegen könne. Im Sinne der *Coulomb-Maxwellschen* Definition schreibt man solchen Körpern einen Überschuß an Nord- oder Südmagnetismus zu, d. h. sie tragen einzelne Nord- oder Südpole [11, 16]. Materieteilchen können also vom Licht nord- oder südmagnetisch aufgeladen werden, was man konsequent als Magnetophotoeffekt bezeichnen muß. Es findet sich hier die von *D. Morichini* schon anfangs des 19. Jahrhunderts entdeckte Erscheinung wieder, daß das Licht die Materie magnetisiert [76]. Dabei können wieder zwei Fälle eintreten:

a) Die polare Bewegung im homogenen Magnetfeld, bzw. ein Teil derselben hält im Dunkeln an [16] oder

b) sie verschwindet im Dunkeln; ihre Größe ist (außer von der Feldstärke) von der momentanen Beleuchtung abhängig. Dieses Phänomen wurde Magnetophotophorese genannt [90].

Während seines Aufenthaltes in den USA. hat der Verfasser solche Vorgänge mikrophotographiert [48]. Ausgezeichnete Aufnahmen hat neuerdings *E. Reeger* gemacht: Abb. 10 zeigt ein nordmagnetisches Eisenteilchen, das sich teils im magnetischen Erdfeld, dem homogensten aller Felder, teils in einem überlagerten künstlichen horizontalen Magnetfeld bewegt.

Der Ausbau des Konzepts der magnetischen Ladungen soll in diesem Berichte später ausführlich besprochen werden. Wir haben selbst früher versucht [90, 94], die Magnetophotophorese (wie auch die Elektrophotophorese) als molekularkinetische Effekte zu deuten, sind aber davon wieder abgegangen [13]. Ähnliche Wege werden auch neuerdings von manchen Autoren wieder eingeschlagen [108]. Die Tatsache der polaren, reversiblen Bewegung im homogenen Magnetfeld ist jedenfalls ohne weiteres verständlich, wenn man annimmt, daß  $\text{div } \mathfrak{B} \neq 0$  sein kann.

### Gravitophotophorese.

Von den Bewegungen, welche Probekörper während ihrer Bestrahlung mit Licht ausführen, erscheint die gewöhnliche Photophorese auf die Lichtrichtung selbst, die Elektro- und

Magnetophotophorese auf die Kraftlinienrichtung eines elektrischen, bzw. magnetischen Feldes bezogen. 1920 hat der Autor angegeben [84], daß Probekörper, auch ganz kugelförmige (Selen), auf- oder abwärts gerichtete Bewegungsimpulse erfahren, die bei horizontalem Lichtstrahl quer zu diesem verlaufen (transversale Photophorese). *E. Reeger* hat dieses Phänomen neuerdings photographiert und näher untersucht. Diese Art von Bewegungen bezieht sich auch bei schief gerichtetem Strahl auf

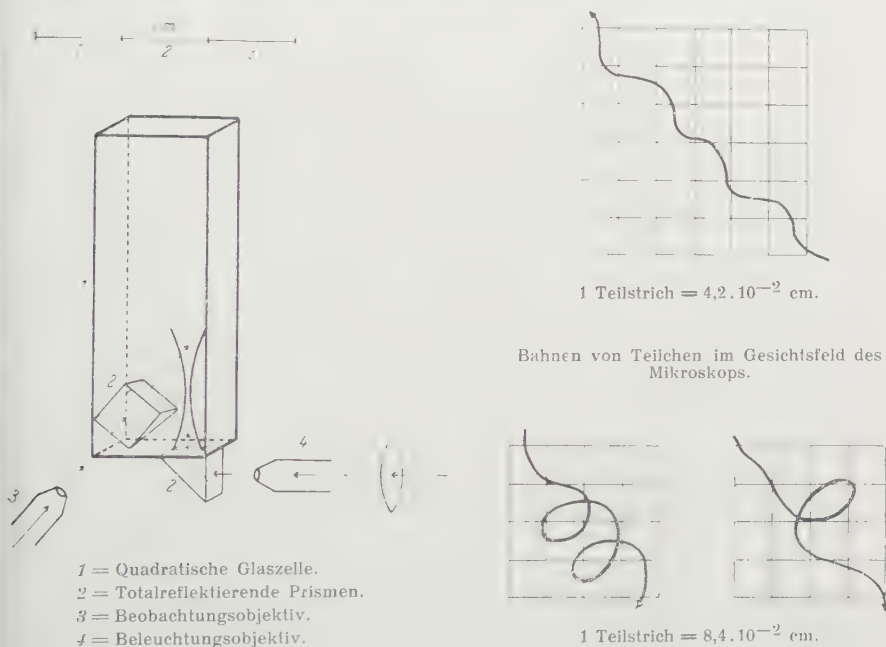


Abb. 2. Anordnung zur visuellen Beobachtung von Schraubenbahnen.

das Lot und ist daher konsequent als „Gravitophotophorese“ zu bezeichnen.

### Die Schraubenbahnen.

Grundsätzlich neuartig und aufregend ist das Phänomen, daß die Bewegung von Materieteilchen in Feldern nicht auf geraden Bahnen, sondern auf Schraubenbahnen der regelmäßigsten Form, Größe und Umlauffrequenz erfolgt [33, 34, 38, 48, 54]. Ihr Durchmesser übersteigt die Dimensionen des Teilchens meist um Größenordnungen; das Verhältnis ist oft 1 : 100. Auch Tropfen, z. B. von Methylorange, das mit etwas Schwefelsäure intensiv rot gefärbt wurde, bewegen sich auf Schraubenbahnen. Somit scheidet jede Erklärung durch einen Flattereffekt



oder dergleichen aus. Zu der Bewegung auf einer Schraube kommt oft noch eine Rotation um die eigene Achse.

Entdeckt wurden die Schraubenbewegungen bei der Photophorese. Anlässlich der Untersuchungen von *Irena Parankiewicz*, die 1918 über die Photophorese an Selen arbeitete, bemerkte der Autor zum erstenmal eine scheinbar unregelmäßige Zickzackbewegung der Probekörper im Licht. Die Erscheinung hat dann auch *J. Mattau* beobachtet. Es wurde untersucht, ob es sich nicht um einen sekundären Effekt handle, der durch stoßartige Verdampfung der Materie entsteht, was verneint werden mußte [85]. In der Folge beschrieben *R. Whytlaw-Gray* und *H. S. Patterson*, welche die Photophorese bei etwa 10 mm Hg Druck untersuchten, die Bewegung verschiedenster Materieteilchen auf Spiralen und Kreisen [93]. In Amerika hat der Verfasser nähere Forschungen an den Schraubenbewegungen im Licht und im Magnetfeld angestellt [29, 34]. *R. Whitall* entwarf eine Anordnung mit einem total reflektierenden Prisma, die Beobachtung schräg zur Bahnachse ermöglichte (Abb. 2). Dadurch konnten wir in die Windungen hineinsehen und die Schraubenform der Bewegung sicherstellen; bei senkrechter Beobachtung kann man natürlich nur eine Sinuslinie erkennen. Mikrophotographien photophoretischer Schraubenbahnen gelangen zuerst im Sonnenlicht, das den Vorteil großer Flächenhelligkeit besitzt. Sie erwiesen, daß Frequenz und Durchmesser durch Magnetfelder beeinflusst werden [38, 54].

Auch die magnetophotophoretische Bewegung erfolgt im allgemeinen auf einer regelmäßigen Schraubenbahn [48]. Abb. 11 a und 11 b zeigen ein Eisenteilchen, das sich in einem wiederholt kommutierten Magnetfeld hin und her bewegt und dabei eine Schraubenbahn beschreibt. Der Umlauf im Sinne einer Rechtsschraube ist in beiden Richtungen der gleiche. — Eine Eigenrotation des Teilchens kann man nur beobachten, wenn es nicht kugelförmig ist. Auf der Abb. 14 erkennt man eine perlenschnurartige Struktur in der Schraubenbahn, die auf eine Rotation des Teilchens um seine Achse deutet.

Nach Untersuchungen von *E. Votava* und *H. Danan* hängt nicht nur die translatorische, sondern auch die rotatorische Komponente einer im Magnetfeld entstehenden Schraube von der Feldstärke ab; bei Variationen der Feldstärke wurden Änderungen der Ganghöhe, des Schraubendurchmessers und der Umlauffrequenz beobachtet<sup>3a</sup>). Die Parameter magnetophotophoretischer Schraubenbahnen, insbesondere die Umlauffrequenz,

<sup>3a</sup>) *H. Danan* hat gefunden, daß zwischen diesen beiden Geschwindigkeitskomponenten einer magnetophotophoretischen Schraubenbahn ein gesetzmäßiger Zusammenhang besteht, u. zw. ändern sie sich bei einer Variation der magnetischen Feldstärke so, daß die resultierende Geschwindigkeit konstant bleibt. (Zusatz bei der Korrektur.)

hängen auch von der Lichtintensität ab. Die Frequenzen reichen von einigen wenigen Umläufen pro Sekunde bis zu mehreren hundert.

Wegen des Einflusses der Lichtintensität auf Schraubenbahnen im Magnetfeld war es zur Klärung der Sachlage nötig, die Wirkung von Magnetfeld und Licht zu trennen. Solche Versuche, die der Autor schon in Amerika ausgeführt hat [48], wurden in jüngster Zeit von *F. Stockinger* reproduziert. Die Versuchsanordnung zeigt Abb. 3: In die Glaszelle, in der ein vertikales magnetisches Feld erzeugt wird, läßt man durch eine Bohrung des oberen Polstückes feine Kupferteilchen von  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  cm Durchmesser fallen, oder man beobachtet solche, die von einer ungebohrten oberen Platte herunterfallen. In Abb. 15a sieht man die geradlinige Fallbewegung der Teilchen ohne Magnetfeld, in Abb. 15b — mit Magnetfeld — erkennt man deutlich Schraubenbahnen. Da die Lichtverhältnisse in beiden Fällen gleich sind, ist das Auftreten der Schrauben hier nur auf das Magnetfeld zurückzuführen. Dies wird durch visuelle Beobachtung bei weitestgehend gedämpftem Licht bestätigt.

Auch durch Intermittieren des Lichtes kann man dessen eventuellen Einfluß eliminieren: Das folgende Photo (Abb. 16) zeigt Nickelteilchen, die im Luftspalt eines Elektromagneten beim Einschalten des Magnetfeldes eine Springbewegung und gleichzeitig eine Drehbewegung um die Feldrichtung ausführen. Die durch einen Pfeil gekennzeichnete Bahn läßt deutlich die Lichtunabhängigkeit der Drehbewegung erkennen. Durch diese Experimente ist gezeigt, daß ein Magnetfeld *unabhängig* vom Licht eine drehende Wirkung auf Materieteilchen ausübt. Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß *Maxwell* immer wieder betont hat: „Um den Magnet dreht sich etwas, aber das hat mit den *Ampèreschen* Molekularströmen nichts zu tun.“

Es gibt also Schraubenbahnen im Licht allein, Schrauben im Licht können durch ein homogenes Magnetfeld verändert werden, und schließlich gibt es Schraubenbahnen im konstanten Magnetfeld *unabhängig* vom Licht.

*P. Tauzin* [102] hat die Beobachtungen an Schraubenbahnen bestätigt; er konnte ferner zeigen, daß Probekörper auch im elektrischen Feld auf Schraubenbahnen laufen.

Also: Die allgemeine Form der Bewegung der Materie in Feldern, beobachtet mit feinsten Mitteln, findet auf regelmäßig gewundenen Schraubenbahnen statt, wobei sich die Teilchen noch um die eigene Achse drehen können [46, 47].

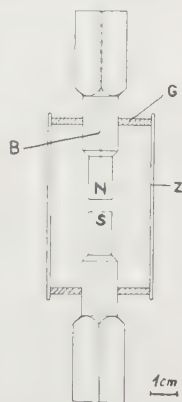


Abb. 3. Zelle des Ehrenhaftschen Mikromagneten, oberes Polstück mit Längsbohrung (B).

Eine Deutung des Phänomens im Rahmen des heutigen physikalischen Systems war noch nicht möglich. Man sieht leicht ein, daß z. B. die Schraubenbahnen von Teilchen im magnetischen Feld nicht wie die scheinbar analogen Bahnen der Kathodenstrahlen durch die *Lorentz*-Kraft gedeutet werden können. Denn man müßte bei den beobachteten Geschwindigkeiten von Bruchteilen von cm sec bis zu ca. 100 cm sec den Teilchen Ladungen von der Größenordnung  $10^3$  el. st. E. zuschreiben, also zehnmillionenfach größere Ladungen als die Sättigungsladung, die sie zu tragen fähig sind [43]. Weiters haben unabhängig voneinander *E. Reeger* und *E. Votava* und neuerdings *H. Danan* bewiesen, daß die Schrauben ganz gleich bleiben, welche elektrische Ladung auch der Probekörper trägt. Es gelang diesen Autoren z. B., die Bahn desselben Teilchens zu verfolgen und dabei seine elektrische Ladung in bekannter Weise durch ein radioaktives Präparat sogar im Vorzeichen zu ändern. Die Schraubenbahn erwies sich als vom elektrischen Ladungszustand ganz unabhängig.

## I. Die Argumente für die Existenz magnetischer Ladungen.

Es ist bekannt, daß eine bis in feine Einzelheiten gehende Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen besteht. Nach der heute herrschenden Auffassung besteht aber doch ein wesentlicher Unterschied: Im Gegensatz zur Elektrizität soll es beim Magnetismus keine wahren Ladungen geben, d. h.  $\text{div } \mathfrak{B}$  soll identisch gleich Null sein. Die Grundlagen der Ansicht, daß der Magnetismus nur bipolar auftreten könne, sind 1. der sogenannte Zerbrechversuch, wonach die Bruchstücke eines Magneten an beiden Enden wieder gleich starke Nord- und Südpole zeigen sollen, und 2. der Bericht von *Peregrinus* (1269) und die danach ausgeführten Versuche von *R. Norman* und *W. Gilbert*, nach denen ein schwimmender Magnetstab sich immer nach Nord-Süd ausrichtet, aber nicht von der Stelle bewegt wird.

Dazu ist zu bemerken: 1. Von dem zweifelhaften Charakter des Zerbrechversuches abgesehen (kann doch schon das Brechen einer unmagnetischen Nadel magnetische Stücke liefern [11, S. 459]), besagt dieser gar nichts, denn man kann aus einem entsprechenden Experiment mit einem Elektreten auch nicht schließen, daß die Elektrizität nur bipolar vorkomme. 2. Die bisherigen Ausführungen des *Peregrinus*-Versuches waren zu unempfindlich, um nachweisen zu können, daß ein homogenes Magnetfeld, wie das der Erde, Körper nicht nur richten, sondern auch bewegen kann.

### Versuche an frei schwebenden Probekörpern.

Bei der Besprechung der Magnetophotophorese wurde ausgeführt, daß frei schwebende Teilchen verschiedener Stoffe, die von intensivem Licht bestrahlt werden, sich in einem homogenen magnetischen Feld (auch im erdmagnetischen Feld) in der Richtung des Feldes bewegen und beim Umpolen ihre Bewegungsrichtung reversieren (Abb. 10). Dies ist nun nichts anderes als eine Wiederholung des *Peregrinus*-Experimentes mit hinreichend empfindlichen Mitteln. Das positive Resultat hat uns dazu geführt, derartige Körper im Sinne der *Coulomb-Maxwellschen* Definition als magnetisch geladen zu bezeichnen.

Mathematisch stellt sich der Sachverhalt folgendermaßen dar: Die ponderomotorische Kraft des elektrischen Feldes auf einen Körper wird im statischen Grenzfall durch den Ansatz

$$\mathcal{R}_e = e\mathcal{E} + f_e \text{ grad } \mathcal{E}^2$$

beschrieben ( $\mathcal{E}$  = elektrische Feldstärke,  $e$  = Ladung,  $f_e$  = eine Funktion der Größe, Gestalt, Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  und Leitfähigkeit des Körpers; z. B. für eine isolierende Kugel vom Radius  $a$ :  $f_e = a^3(\varepsilon - 1)/2(\varepsilon + 2)$ ). Den ersten Term bezeichnet man als Ladungskraft, den zweiten als Polarisationskraft, da er von der Erzeugung eines Dipolmomentes durch dielektrische Polarisation herrührt.

Für die Translationskraft des magnetischen Feldes (die *Lorentz*-Kraft kann wegen der geringen Geschwindigkeiten hier vernachlässigt werden) rechnete man bisher mit dem Ansatz

$$K_{m,i} = m \text{ grad } H_i, \quad i = x, y, z$$

( $m$  = magnetisches Moment des Körpers,  $\mathcal{H}$  = die magnetische Feldstärke). Insbesondere gilt, wenn das Moment nur induziert ist ( $m \sim \mathcal{H}$ ), analog wie im elektrischen Fall,

$$\mathcal{R}_m = f_m \text{ grad } \mathcal{H}^2$$

( $f_m$  = Funktion der Größe, Gestalt, Permeabilität  $\mu$  des Körpers; z. B. für eine Kugel:  $f_m = a^3(\mu - 1)/2(\mu + 2)$ ). Eine im wesentlichen gleiche Formel gilt auch dann, wenn der Körper ein remanentes magnetisches Moment hat (wie dies bei Ferromagnetisiz sicher eintritt), denn es handelt sich in unserem Fall um Körper mit allen sechs Freiheitsgraden, die sich immer so einstellen, daß das magnetische Moment parallel zur Feldrichtung zu liegen kommt. Dieser Ansatz ist nun nicht imstande, Bewegungen im homogenen Magnetfeld und Bewegungen, die mit dem Feld reversieren — sei dieses nun homogen oder nicht —, zu beschreiben, denn 1. verschwindet dieser Ausdruck für  $\mathcal{H} = \text{const}$  und 2. bleibt  $\text{grad } \mathcal{H}^2$  ungeändert, wenn das Feld bei konstanter Konfiguration umgepolt wird ( $\mathcal{H} \rightarrow -\mathcal{H}$ ). In



Analogie zum elektrischen Fall ist die Formel daher durch einen Ausdruck zu ergänzen, der die magnetische Feldstärke linear enthält, also

$$\mathcal{R}_m = q\mathcal{S} + f_m \text{ grad } \mathcal{S}^2$$

( $q$  ist die „magnetische Ladung“). Es wird sich zeigen, daß dieser Ansatz gestattet, die beobachteten Bewegungen der Probekörper in beliebig gestalteten Magnetfeldern zu beschreiben, sofern man von der Schraubenform der Bahnen absieht.

Trägt man die magnetophotophoretische Geschwindigkeit als Funktion der magnetischen Feldstärke auf, so erkennt man zunächst einen linearen Anstieg, bei hohen Feldstärken tritt eine Art „Sättigung“ der Geschwindigkeit ein [3, 69]. Wie neuere Untersuchungen von *L. Steipe* ergaben, ist die Geschwindigkeit in diesen Bereichen jedoch im allgemeinen nicht konstant, sondern wächst weiterhin monoton mit der Feldstärke. Betrachtet man die Beweglichkeit des Körpers als konstant, so bedeutet dies einen analogen (zuerst linear, bei hohen Feldstärken flacher ansteigenden) Verlauf der Kraft. Die Größe  $q$  erscheint somit als zunächst konstant, bei höheren Feldstärken als von  $H$  abhängig. Die Ursache dieser Erscheinung ist noch nicht bekannt; es ist aber wichtig, festzustellen, daß diese typische Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Feldstärke bei der Elektrophotophorese eine vollkommene Parallele findet [95]. Neben diesem charakteristischen Verlauf der Geschwindigkeit als monotoner Funktion der magnetischen Feldstärke hat insbesondere *N. Judenberg* Fälle festgestellt, wo die Geschwindigkeit mit wachsendem  $H$  wieder abnimmt und sogar das entgegengesetzte Vorzeichen erreichen kann [3, S. 167].

Eine neuere Aufnahme der polaren, mit dem Magnetfeld reversierenden Bewegung gibt Abb. 17 wieder. Die Teilchen, welche im wiederholt kommutierten Magnetfeld in einer Zickzacklinie herunterfallen, waren schon mit freiem Auge sichtbar. Es treten also auch an makroskopischen Körpern einzelne Magnetpole auf.

*F. Blaha* konnte die polare Bewegung in einem Solenoid, wobei also die beste Homogenität des Feldes garantiert ist, nachweisen.

Es sei noch bemerkt, daß der elektrische und der magnetische Ladungszustand eines Körpers voneinander unabhängig sind, wie der Versuch lehrt. Es kann ein Körper elektrisch geladen und magnetisch ungeladen sein und umgekehrt, er kann auch beide Arten von Ladungen tragen<sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> *Page* und *Adams* [„Electrodynamics“ (1940)] stellen fest, daß die *Maxwellschen* Gleichungen ungeändert bleiben würden, wenn die magnetische Ladung eines Körpers stets der elektrischen Ladung proportional wäre. Ein solcher Zusammenhang besteht also nicht.



*Weitere Versuche im homogenen Magnetfeld.*

Viele interessante Phänomene werden beobachtet, wenn man Probekörper in ein sehr starkes, horizontal gerichtetes homogenes Magnetfeld fallen läßt. Frühere derartige Versuche des Verfassers [49] wurden in neuerer Zeit von *J. Ferber* reproduziert und ausgebaut [67]. Die Anordnung, das magnetische Analogon zu der 1909 entwickelten Apparatur für elektrische Ladungsmessungen [79], besteht aus einem Alnicomagneten, dem quaderförmige Weich-

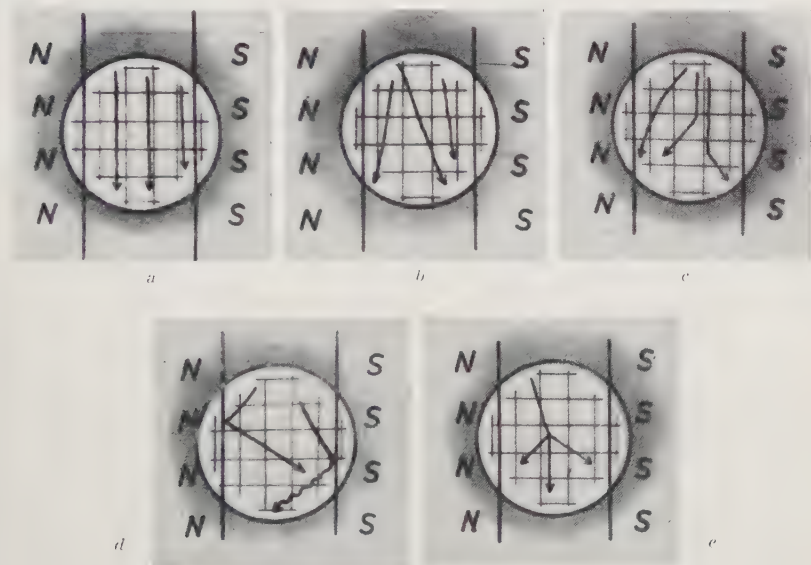


Abb. 4. Bahnen von Eisen- oder Chromteilchen, welche in einem horizontalen homogenen Magnetfeld fallen.

eisenpolschuhe aufgesetzt sind, in deren Luftspalt ein homogenes Magnetfeld von 5000 Gauß herrscht. Dazwischen befindet sich die Beobachtungszelle in Form eines quadratischen Glasprismas, in welche man durch ein Loch des oben abschließenden Deckels feine Teilchen fallen läßt. Die Seitenwände der Zelle sind innen mit Metallfolien belegt und diese zusammen mit dem Magneten geerdet, so daß keine störenden elektrischen Felder auftreten können. Auch in einem Faraday-Käfig erhält man die gleichen Erscheinungen. Die Beleuchtung erfolgt von unten durch einen Lichtstrahl, der eine optische Kühlvorrichtung (Lösung von *Mohrschem Salz*) durchlaufen hat. Beobachtet wird im Dunkelfeldmikroskop senkrecht zum Magnetfeld von vorne. Als Versuchssubstanzen dienten *Fer Omega* (reinstes kugelförmiges Eisenpulver) und Chrompulver.

Abb. 4 zeigt, was beobachtet wird: Unabgelenkte, vertikale Bahnen (Fig. a); abgelenkte, geradlinige Bahnen, teilweise die

Symmetrieebene zwischen den Polschuhen überquerend (Fig. *b*); Bahnen, deren Winkel gegen die Vertikale sich ändert; meistens macht dabei die Bahn einen Knick, in manchen Fällen biegt sie kontinuierlich um (Fig. 4*c*, Abb. 12).

Die Deutung mit Hilfe des Begriffs der magnetischen Ladung fällt nicht schwer: *a* entspricht magnetisch ungeladenen Teilchen, *b* Teilchen mit einer magnetischen Ladung. Aus dem Ablenkwinkel und der Fallgeschwindigkeit können die Ladungswerte bestimmt werden; es ergaben sich magnetische Ladungen zwischen  $10^{-9}$  und  $10^{-14}$  m. st. E. [49, 101]. *c* hat man als Teilchen aufzufassen, deren Ladung sich ändert, die also z. B. magnetisch neutral in das Gesichtsfeld treten und durch photomagnetischen Prozeß aufgeladen werden. Daß all diese Ablenkungen nicht die Folge einer Feldinhomogenität sein können, beweisen das Auftreten unabgelenkter Bahnen, die statistische Gleichverteilung der Anzahl der gegen Nord und der gegen Süd abgelenkten Partikeln, sowie jene Teilchen, welche mit konstantem Ablenkwinkel die Symmetrieebene traversieren.

Bemerkenswert ist ferner die Erscheinung, daß es abgelenkte Teilchen gibt, welche auf eine der Folien an den Zellenwänden treffen und von dort wieder in das Feld wandern (Fig. *d*). Der Vorgang ist offenbar der, daß diese Teilchen an der Wand ihre magnetische Ladung abgeben und eine von entgegengesetztem Vorzeichen aufnehmen, sich z. B. von Nord auf Süd umladen. Die Erscheinung ist analog dem bekannten Experiment, bei dem ein Holundermarkkügeln zwischen den Platten eines elektrisch aufgeladenen Kondensators aufgehängt ist: das Kügelchen wird zwischen den Platten hin und her gestoßen und transportiert dabei Ladung.

Von großer Bedeutung ist schließlich die Beobachtung, daß ein in das Magnetfeld eintretender Verband von Teilchen zerlegt wird und jedes der zwei oder drei Bruchstücke in einer anderen Ablenkrichtung weiterfällt („magnetischer Burst“, Fig. *e*) [48]. Die von *Ferber* ausgeführte Durchrechnung der gemessenen Ablenkwinkel und Fallgeschwindigkeiten des Konglomerates und der Bruchstücke nach der Trennung ergab, daß die Summe der magnetischen Ladungen der Bruchstücke unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens sehr gut innerhalb der Meßfehlergrenzen mit der Ladung der Zusammenballung übereinstimmt. Auch die Massenbilanz konnte kontrolliert werden. Damit ist gezeigt, daß die als magnetische Ladung definierte Größe *q*, wie man es für eine Ladung fordern muß, die Eigenschaft der Erhaltung besitzt.

Die bisher betrachteten Bewegungen erfolgten im Magnetfeld unter gleichzeitiger Einwirkung von Licht. Es erhebt sich natürlich die Frage, ob auch im Dunkeln magnetische Ladungen auftreten. Um dies zu untersuchen, wird, während sich der

Körper im Gesichtsfeld bewegt, die Beleuchtung unterbrochen. Es stellt sich heraus, daß ein Teil der abgelenkt fallenden Probekörper im Dunkeln seine Bewegungskomponente in Feldrichtung ganz verliert, ein anderer verliert sie teilweise, während manche Probekörper ihre Bewegungskomponente in Feldrichtung unverändert beibehalten (Abb. 13). Daß es sich nicht um eine Trägheitserscheinung handelt, konnte durch die Rechnung sicher erwiesen werden. Damit ist der Beweis geliefert, daß magnetische Ladungen auch im Dunkeln auftreten [16].

Neuere Messungen der Geschwindigkeit schwebender Teilchen im homogenen Magnetfeld bei periodisch intermittiertem Licht, von *L. Steipe* ausgeführt, haben ebenfalls ergeben, daß auch im Dunkeln eine Bewegung vorhanden ist.

Alle hier besprochenen Phänomene stehen in einer vollkommenen Analogie zu dem, was man bei entsprechender Anordnung elektrischer Felder beobachtet.

Es ist versucht worden, die Bewegungen in Richtung der magnetischen Feldlinien so zu erklären, daß das Feld nicht genau homogen wäre und eine ponderomotorische Kraft auf magnetische Dipole ausübe. Die Bewegungsumkehr bei der Kommutation des Feldes wollte man so deuten, daß der Körper um eine zum Feld parallele Achse rotiere und dieser Dipol dadurch richtungsstabilisiert würde, so daß er beim Umpolen des Feldes nicht umklappt. Von der Unhaltbarkeit dieser ad hoc-Hypothese kann man sich schon durch direkte Beobachtung überzeugen: Längliche Teilchen, die im Feld bewegt und außerdem wie Dipole orientiert werden, klappen bei der Kommutation tatsächlich um  $180^\circ$  um; man kann auch deutlich erkennen, daß Teilchen eine reversierbare polare Bewegung zeigen, ohne zu rotieren. Im übrigen ergibt auch die Verwendung inhomogener Magnetfelder typische Bewegungserscheinungen, die sich ohne eine Ladungskraft  $qH$  nicht deuten lassen, wie nun erläutert werden soll.

### *Versuche in inhomogenen Magnetfeldern [49].*

Die Apparatur ist ähnlich der bei den eben besprochenen Versuchen verwendeten, mit dem Unterschied, daß dem Alnicomagneteten Polschuhe in Form einer Spitze und einer Platte aufgesetzt sind, so daß das Magnetfeld in der Beobachtungszelle stark inhomogen ist (Abb. 5). Im Bereich der Polschuhachse ist die Richtung von  $\text{grad } S^2$  zur Richtung von  $S$  parallel. Die verwendeten Probekörper waren unter anderem von Silber, Antimon, Zink, Elektrolytkupfer, Chrom, Kohle, Mangan. Daß, wie häufig beobachtet wird, diamagnetische Körper (deren Polarisationskraft also in Richtung der abnehmenden Feldlinien-dichte wirkt) zur Spitze, d. h. in Richtung der dichteren Kraft-

linien gezogen werden, muß als Folge des Überwiegens einer der Polarisationskraft entgegenwirkenden Ladungskraft  $qS$  angesehen werden. Ferner kommt es vor, daß paramagnetische Körper gegen den plattenförmigen Polschuh abgelenkt werden, was analog zu deuten ist. Man beobachtet auch bei diesem Versuch, daß Teilchen, die gegen die Spitze gezogen werden, eine Spiralbahn beschreiben.

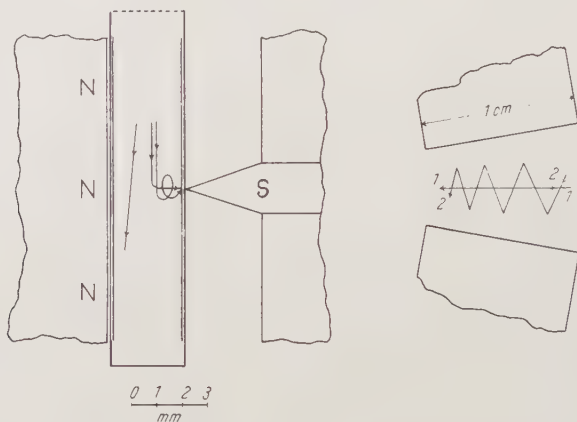


Abb. 5 und 6. Bewegung von Teilchen in inhomogenen Magnetfeldern.

Ähnliche Beobachtungen wurden von *F. Blaha* gemacht: Es gibt Eisenteilchen, die in einer gewissen Entfernung von einem Stabmagneten abgestoßen werden; durch Umdrehen des Magneten wird die Bewegung reversiert. Führt man diesen näher heran, so nimmt die Laufgeschwindigkeit ab, bei einer bestimmten Entfernung des Magneten kommt das Teilchen zur Ruhe. Bei weiterer Annäherung wird es zum Magneten gezogen; diese Bewegung ist nicht mehr reversierbar. Solche Probekörper sind als Dipole, die außerdem eine magnetische Ladung tragen, zu deuten: in entsprechender Entfernung überwiegt eine vom Magneten weg gerichtete Ladungskraft, in der Nähe die bei Eisen stets anziehende Polarisationskraft, dazwischen gibt es eine Stelle, wo die Gesamtkraft verschwindet. Gleichartige Ergebnisse erzielt man bei Verwendung eines Elektromagneten variabler Stärke [60].

Eine weitere Anordnung, die ein inhomogenes Magnetfeld liefert, zeigt Abb. 6. An einem Elektromagneten sind zwei Polschuhe mit ebenen Endflächen so angebracht, daß der Luftspalt Keilform hat. Dadurch entsteht ein Feld, dessen Kraftlinien etwa parallel sind, während ihre Dichte nach einer Seite hin zunimmt. In diesem Fall ist die Richtung von  $\text{grad } S^2$  senkrecht auf der Richtung von  $S$ . Man beobachtet Eisenteil-



chen, die, von der Fallbewegung abgesehen, in das dichtere Feld wandern. Bei mehrfachem Umpolen erkennt man aber auch Teilchen, die eine Zickzackbahn durchlaufen. Diese sind Träger magnetischer Ladungen, da zwar die vertikal orientierte Ladungskraft, aber nicht die horizontal wirkende Polarisationskraft beim Kommutieren ihre Richtung ändert.

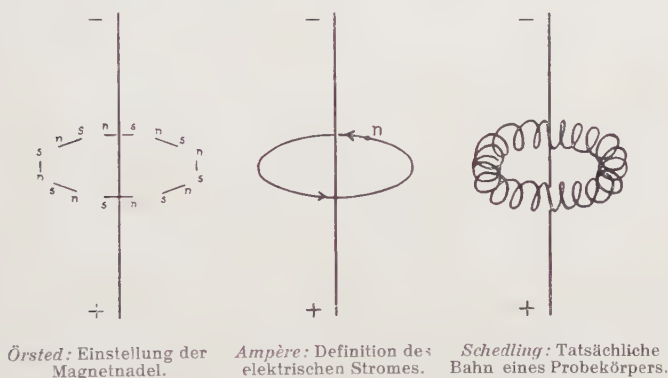


Abb. 7. Wirkung des elektrischen Stromes auf magnetische Materie.

### Der Versuch von Örsted-Schedling.

J. A. Schedling hat 1948 die Bewegung metallischer Probekörper in dem typischen inhomogenen Feld eines linearen stromdurchflossenen Leiters untersucht [51, 57, 64]. Dieser Versuch über die ponderomotorische Wirkung eines elektrischen Stromes auf magnetische Materie hat in der Geschichte der Physik eine prinzipielle Rolle gespielt. Abb. 7, linkes Bild, zeigt, wie sich beim Versuch von H. Chr. Örsted vom 21. Juli 1820 Magnetnadeln von zwei Freiheitsgraden senkrecht zu dem Draht einstellen, der die beiden Pole der Voltaschen Säule verbindet. Das mittlere Bild stellt dar, wie der einzelne Magnetpol im Kreise um den Draht herumgeführt würde. Trägt er gleichzeitig eine elektrische Ladung, dann würde er durch das längs des Drahtes vorhandene Gefälle des elektrischen Potentials in einer Schraubenbahn um den Leiter bewegt. Dieses Bild von der Wechselwirkung zwischen Elektrizität und Magnetismus, das irgendwie unklar bereits Örsted vorschwebte<sup>5)</sup>, ist erst im Geiste Ampères

<sup>5)</sup> In der Abhandlung von H. Chr. Örsted: Versuche über die Wirkung des electrischen Conflicts auf die Magnetnadel (herausgegeben von Gilbert in Ostwalds Klassikern) heißt es, daß „der electriche Conflict“ (darunter versteht Örsted „die Wirkung, welche in dem verbindenden Leiter und um denselben her vor sich geht“) „... in Kreisen fortgehe ... Es scheint überdem, es müsse die Kreisbewegung, verbunden mit der fortschreitenden Bewegung nach der Länge des Leiters, eine Schneckenlinie oder Spirale beschreiben ...“.



entstanden. Er definierte die Intensität dessen, was er den „elektrischen Strom“ nannte, als jene Arbeit, die man leisten muß, um den magnetischen Einheitspol einmal in geschlossener Bahn um den Leiter herumzuführen.

Der Versuch von *Schedling* hat gezeigt, daß Materieteilchen, etwa aus Eisen oder Kobalt etc., die sechs Freiheitsgrade und nicht bloß zwei, wie die *Örsted'schen* Magnetnadeln, besitzen, tatsächlich in Kreisbahnen um den stromdurchflossenen Leiter laufen, sofern man von der Fallbewegung abstrahiert, und mit der Umkehrung des Stromes ihre Bewegung umkehren. Im Sinne *Ampères* sind sie Träger magnetischer Nord- oder Südladungen (Abb. 18). Man kann auch beobachten, daß sich Teilchen um die Kreisbahn noch schrauben (Abb. 7, rechtes Bild).

Eine Modifikation dieses Experimentes stammt von *F. Blaha* [60], der eine stromdurchflossene Leiterschleife benützte. Wenn die Polarisationskraft die einzige ponderomotorische Kraft des magnetischen Feldes auf Materieteilchen wäre, so würde man erwarten, daß z. B. Eisenpartikeln, der Richtung der zunehmenden Feldliniendichte folgend, auf die Schleife zu wandern, um an irgendeiner Stelle auf den Draht zu stoßen; es wäre jedenfalls unmöglich, daß die von der Schleife umgrenzte Ebene, wo die größte Feldliniendichte herrscht, überschritten würde. Tatsächlich werden aber Teilchen beobachtet, die entlang der Linien der magnetischen Kraft von einer Seite der Schleife auf die andere gehen und dabei die Symmetrieebene durchschreiten. Die Bewegung ist mit dem Strom reversierbar. Auch in diesem Falle muß also eine Kraft  $qS$  herrschen.

### Die Wirkungen eines Magneten auf Flüssigkeiten.

Von den Entdeckungen an mikroskopischen Probestoffen ausgehend, schritt der Verfasser daran, die chemische Wirkung des Magneten auf wäßrige Elektrolyte zu untersuchen. Denn wenn der Begriff der magnetischen Ladung heuristisch geeignet ist und es magnetische Ionen in Flüssigkeiten gibt, so sind bei der Einwirkung eines Magneten chemische Umsetzungen zu erwarten. Diese Erwartung hat sich bestätigt [17]. Überdies kann man dabei eine Reihe weiterer wichtiger Phänomene beobachten, so vor allem das Auftreten von Gasblasen, die offenbar magnetisch geladen sind, und typische Rotationserscheinungen [100].

Als Repräsentant für die zahlreichen in der magnetischen Zelle beobachteten Effekte sei hier die Einwirkung eines Magneten auf angesäuertes Wasser näher ausgeführt. In eine Zelle, in welche zwei Stücke aus weichem schwedischem Eisen ragen, wird mit 1 bis 4% Schwefelsäure angesäuertes Wasser gefüllt. Es geht eine chemische Reaktion zwischen dem Eisen und der Säure vor sich, bei der sich Wasserstoffblasen bilden, die, dem

Auftrieb folgend, aufsteigen (Abb. 19a). Wenn man nun die beiden Eisenstücke magnetisiert, so daß von den eingetauchten Enden eines zum Nord-, das andere zum Südpol wird, so geschieht folgendes:

1. Die chemische Reaktion wird stärker, außer Wasserstoff erhält man auch etwas Sauerstoff.
2. In einem angeschlossenen Verbindungsdraht fließt ein schwacher elektrischer Strom.
3. Es gibt Gasblasen, die gegen den Auftrieb nach unten geschleudert werden.
4. Der größte Teil der Gasblasen, bzw. die Flüssigkeit, dreht sich um die Pole.

Ad 1. Es ist eine alte Streitfrage, die schon vor mehr als 150 Jahren zur Diskussion stand (*J. W. Ritter* [73], *M. A. F. Lüdicke* [74], *P. Erman* [75]) und unter *A. Fresnel* [77] wieder auflebte, ob der magnetische Körper eine chemische Wirkung ausübt. Das Auftreten von Sauerstoff in diesem Prozeß, wo nur Wasserstoff entstehen sollte, scheint nun tatsächlich die *chemische Wirkung des Magneten*<sup>6)</sup> zu beweisen und gibt somit einen Anhaltspunkt hinsichtlich der Existenz magnetischer Ionen. Eine 1944 von der *Foster D. Snell Inc.*, Brooklyn, ausgeführte Analyse der bei Versuchen des Verfassers mit magnetisiertem Eisen und Schwefelsäure entwickelten Gasmenge ergab:

Probe:	Sauerstoff in Vol.‰ des entwickelten Gases
1170—1	2,35
1170—2	1,80
1170—3 (Eisen unmagnetisiert)	0,00
1170—4	2,55
1170—5 (Eisen unmagnetisiert)	0,00
1170—6	1,96

Gemeinsam mit *R. Whitall* ausgeführte Experimente [22, 23, 26] zeigten, daß, ebenso wie die Magnetisierung der Pol-

<sup>6)</sup> Es existiert ein U.S.-Patent auf den Namen *Alfred Kilgus* (Nr. 2,016,442 vom 8. Oktober 1935), in welchem bereits der Einfluß von Magneten auf die Zersetzung wäßriger Elektrolyte beschrieben ist: "My invention is based on the discovery that such decompositions may be either brought about or favourably influenced by magnetic fields and/or magnetic forces. If for instance a permanent magnet or an electromagnetic body is brought into contact with acidulated water, a distinct development of gases occurs, which mainly consists of hydrogen which is by no means due to merely chemical phenomena, i.e. to a dissolution of the iron of the magnet, since the development of gases also occurs in such cases in which a magnet or electromagnet has been previously passivated with the aid of concentrated nitric acid to such an extent that it does not react with dilute acids . . ."

schuhe durch Amperewindungen, auch das Anlegen eines permanenten Magneten den chemischen Prozeß verstärkt, beispielsweise wurde eine Vergrößerung der Gasmenge um  $8,3\%$  bei sonst gleichen Bedingungen festgestellt) und neben dem Wasserstoff auch Sauerstoff entstehen läßt. Fängt man die am Nord- und die am Südpolschuh gebildeten Gase getrennt auf, so findet man eine etwas stärkere Gasentwicklung am Nordpol (z. B.  $52,1 \text{ cm}^3$  gegen  $41,9 \text{ cm}^3$  aus  $80 \text{ cm}^3 \text{ H}_2\text{O}$  mit  $4 \text{ Vol.}\%$   $\text{H}_2\text{SO}_4$  in 2 Std. 50 Min.).

Weiters zeigte sich bei den mehrfach wiederholten Versuchen, daß laut chemischer Analyse in der am Nordpol entwickelten Gasmenge der Prozentsatz des Sauerstoffes stets größer war:

	Nordpol	Südpol
Versuch 1:	$1,43\%$	$1,12\%$
2:	$0,87\%$	$0,57\%$
3:	$0,25\%$	$0,16\%$

In den Fällen, wo die Weicheisenstücke nicht magnetisiert worden waren, wurde der Sauerstoffanteil immer zu Null gefunden.

Die Verwendung des permanenten Magneten gestattete, die Energiebilanz auf einfache Weise zu überblicken. Wenn man von einem neuen Alnicomagneten den Keeper abnimmt, so verliert der Magnet zunächst an Polstärke. Nach einigen Tagen oder Wochen erreicht sie einen konstanten Wert. Erst dann kann man sinnvoll arbeiten. Wir haben mehrmals festgestellt, daß jedesmal, nachdem der Magnet bei der Einwirkung auf die Flüssigkeit gearbeitet hatte, eine Verminderung der Polstärke eingetreten war [22]. (Man muß bei solchen Messungen sehr achtgeben, denn wir haben die Erfahrung gemacht, daß Alnicos unter Umständen von selbst an Polstärke verlieren oder gewinnen können.)

Die Bekanntgabe dieser Resultate zog eine Reihe von Versuchen nach sich [96, 97, 98]. Die Reproduktion der Versuche gelang nur zum Teil. Manche Autoren gaben an, keinen Sauerstoff gefunden zu haben. *Kendall*, der das Wasser mit Salzsäure angesäuert hatte, fand ebenfalls Sauerstoff, u. zw. so wie der Verfasser am Nordpol etwas mehr, vermutete aber, daß der Sauerstoff in der Flüssigkeit gelöst gewesen und durch die bei seinem Versuch eingetretene Erwärmung der Polschuhe ausgetrieben worden wäre.

In jüngster Zeit hat nun *G. Wagner*, Technische Hochschule Wien, auf Ersuchen des Verfassers penible Untersuchungen [107] mit einer von ihm entworfenen Apparatur ausgeführt, die nach

Ansicht *Wagners* keinerlei Einwendungen zuläßt. Vorversuche wurden mit einem Elektromagneten gemacht, später wurde ein Alnicomagnet benützt. Die Polschuhe waren aus demselben schwedischen Eisen, wie der Verfasser es seinerzeit verwendet hatte (Firma Setterwaal & Co., Stockholm, mit folgenden Spurengehalten: C 0,03<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, Si 0,02<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, Mn 0,02<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, P 0,026<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, S 0,03<sup>0</sup>/<sub>0</sub>), die Flüssigkeit war auf 2<sup>0</sup>/<sub>0</sub> verdünnte Schwefelsäure (Merck p. a. für forensische Zwecke). *Wagner* berichtet: „Nun die elf letzten Resultate, für deren unbedingte Zuverlässigkeit ich garantieren kann.

## Leerversuche ohne Magnet

Versuch Nr. 4:	0,00 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	Sauerstoff
6:	0,05 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„
10:	0,15 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„
14:	0,10 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„
15:	0,00 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„

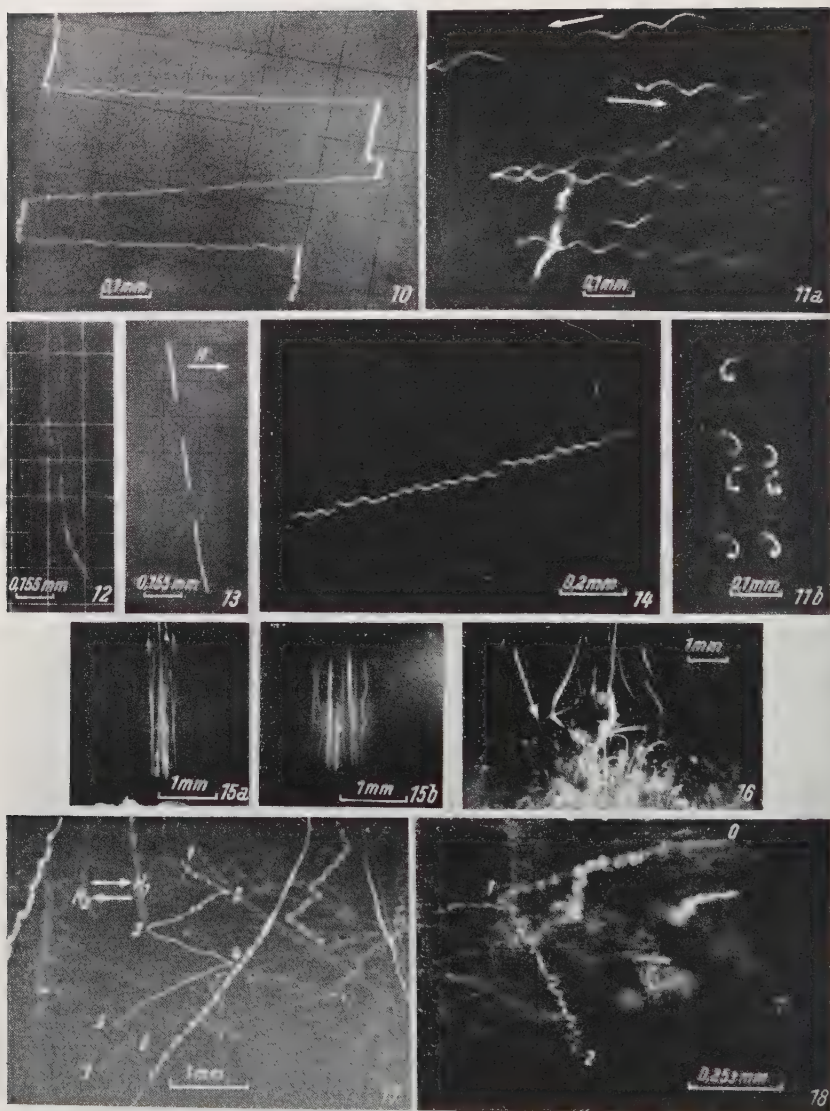
## Versuche mit Magnet

7:	0,45 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	Sauerstoff
8:	0,30 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„
9:	0,35 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„
11:	0,40 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„
12:	0,25 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„
13:	0,40 <sup>0</sup> / <sub>0</sub>	„

Das heißt also, feststeht, daß mit angelegtem Magneten an den Polschuhen eine Sauerstoffabscheidung bis zu einem halben Prozent (in bezug auf den durch Auflösung der Eisenpolschuhe in der verdünnten Schwefelsäure entwickelten Wasserstoff) stattfindet. Ohne angelegten Magneten erfolgte eine gerade noch erfaßbare Abscheidung in der Größenordnung von 0,05<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Sauerstoff. Es handelt sich in beiden Fällen, also mit und ohne Magnet, tatsächlich um Sauerstoff, den ich unzweideutig identifiziert habe. Nicht völlig klar ist die Abscheidung kleinster Mengen an Sauerstoff beim Leerversuch ohne angelegten Magneten. Ich vermute, daß das verwendete Eisen, so wie alle Metalle, geringe Mengen an Sauerstoff gelöst oder okkludiert enthält.“

Der vom Verfasser festgestellte, von einigen Autoren bestrittene Tatbestand, daß in dem Prozeß zwischen magnetisiertem Eisen und verdünnter Schwefelsäure Sauerstoff entstehen kann, ist durch diese genauen Untersuchungen also bestätigt worden. Nicht entschieden blieb nach *Wagner* aber noch die Frage, ob der Sauerstoff tatsächlich durch einen -lytischen Prozeß aus der Flüssigkeit gebildet wird — welche Ansicht der Verfasser vertrat — oder aber aus dem Eisen stammt und etwa durch mechanische Wirkung (z. B. infolge der Verwirbelung der Flüssigkeit an den Polschuhen) im Fall der Magnetisierung leichter freigesetzt wird. Um darüber zu entscheiden, war noch der Versuch mit reinem, sauerstofffreiem Eisen zu wiederholen. *F. Blaha* kam zu dem Ergebnis, daß auch bei Verwendung von spektral reinem Eisen die Sauerstoffabscheidung bei Magneti-





sierung merklich größer ist (0,1% gegen 0,05% ohne Magnetisierung)<sup>6a)</sup>.

Ad 2. Daß zwei Stücke aus Eisen, also aus gleichem Material, ein galvanisches Element bilden, wenn sie magnetisiert

<sup>6a)</sup> Professor *Wagner* hat dem Autor liebenswürdigerweise mitgeteilt, daß mit Polschuhen aus Eisen, das durch Erhitzen im Wasserstoffstrom bei



Abb. 10. Eisen in Luft, Horizontales Magnetfeld (20 Gauß). Ein nordmagnetisches Teilchen bewegt sich teils nur im Erdfeld (senkrechte Bahnteile), teils im mehrfach kommutierten künstlichen Magnetfeld (waagrechte Bahnteile). Aufgenommen im Mikroskop, Apertur 0,3; Gesamtbelichtungszeit mehrere Sekunden. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

Abb. 11 a und b. Eisen in Luft, horizontales Magnetfeld (20 Gauß). Nordmagnetisches Teilchen bewegt sich im wiederholt kommutierten Magnetfeld hin und her und beschreibt dabei eine Schraubenbahn mit einer Frequenz von ca. 5/sec. Bild 11 a: Blickrichtung senkrecht zum Magnetfeld; Bild 11 b: Blickrichtung parallel zum Magnetfeld, das Teilchen geht mehrere Male durch die Schärfenebene des Mikroskops, wobei man jeweils eine einzelne Schraubenwindung sieht. Aufgenommen im Mikroskop, Apertur 0,3; Gesamtbelichtungszeit (11 a) 8 Sekunden. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

Abb. 12. Fallendes Eisenteilchen; horizontales homogenes Magnetfeld (7000 Gauß); Beleuchtung von unten. Das Teilchen fällt ein Stück unabgelenkt und biegt dann aus der Vertikalen in Feldrichtung ab. (Aufnahme *Josef Ferber*.)

Abb. 13. Fallendes Fer Omega-Teilchen; horizontales homogenes Magnetfeld (7000 Gauß); die Beleuchtung des Teilchens ist zweimal unterbrochen. Das Teilchen behält seine Ablenkung im Dunkeln vollkommen bei. Fallgeschwindigkeit  $20,7 \cdot 10^{-3}$  cm/sec; Radius (nach dem Stokeschen Gesetz berechnet)  $4,48 \cdot 10^{-5}$  cm; magnetische Ladung  $6,6 \cdot 10^{-14}$  m st. E. Nord. (Aufnahme *Josef Ferber*.)

Abb. 14. Eisen in Luft, horizontales Magnetfeld (35 Gauß), Bogenlampenlicht, periodisch unterbrochen (0,65 sec hell, 0,65 sec dunkel). Süd magnetisches Teilchen bewegt sich von rechts nach links (zugleich schwache Fallbewegung) und beschreibt eine Schraubenbahn mit der Frequenz 5/sec, ferner führt es eine Eigenrotation aus (Lichtknoten). Die Dunkelpausen sind an den Unterbrechungen der Spur erkennbar. Aufgenommen im Mikroskop, Apertur 0,3. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

Abb. 15 a und b. Im Luftspalt des Mikromagneten (siehe Abb. 3) fallende Kupferteilchen. Die Fallgeschwindigkeit liegt zwischen 2 und 5 cm/sec. Bild 15 a: Ohne Magnetfeld, geradliniger Fall. Bild 15 b: Vertikales Magnetfeld (7000 Gauß). Schraubenbahnen mit einem Durchmesser von  $\frac{1}{8}$  mm und Ganghöhen von 1,4, bzw. 0,6 mm. (Aufnahme *Felix Stockinger*.)

Abb. 16. Luftspalt des Mikromagneten (siehe Abb. 3), intermittiertes Bogenlampenlicht (150 Lichtunterbrechungen pro Sekunde). Auf dem unteren Polstück liegende Nickelteilchen werden durch ein plötzlich eingeschaltetes Magnetfeld von 7000 Gauß zu Bewegungen veranlaßt, wie aus der Photographie ersichtlich ist. Die Drehbewegungen werden durch die Lichtunterbrechungen nicht beeinflußt, wie die durch Pfeil gekennzeichnete Bahn erkennen läßt. (Aufnahme *Felix Stockinger*.)

Abb. 17. In Luft fallende, mit freiem Auge sichtbare Eisenteilchen, wiederholt kommutiertes, horizontales homogenes Magnetfeld (60 Gauß). Spur eines nordmagnetischen Teilchens: Bahnstücke 1-2, 3-4, 5-6 im Magnetfeld  $H_1$ , Bahnstücke 2-3, 4-5, 6-7 im Magnetfeld  $H_2$ . (Aufnahme *Kurt Desoyer*.)

Abb. 18. Silberstahl (im elektrischen Lichtbogen zerstäubt) in Luft. Zwei vertikale Leiter, senkrecht zur Bildebene: Leiter I unterhalb des Bildes, rechts, Leiter II links außerhalb des Bildes. unten. Beleuchtung von rechts. Zuerst fließt in I, dann in II Gleichstrom (Magnetfeld 3-4 Gauß). Das Teilchen beschreibt Kreisbogen um die Leiter: 0-1 um I, 1-2 um II. Aufgenommen im Mikroskop, Apertur 0,3. (Aufnahme *Erwin Votava*.)

Unterdruck entgast wurde, kein Sauerstoff mehr nachgewiesen werden konnte. Wenn aber bei all diesen Versuchen der Sauerstoff aus dem Eisen stammte, oder durch Versuchsfehler (Diffusion) hineingebracht worden wäre, so bleibt noch ungeklärt, wieso bei den oben angegebenen Experimenten des Verfassers die ohne Magnetfeld unter sonst gleichen Bedingungen gewonnenen Proben gar keinen Sauerstoff ergaben, ferner, wieso am Nordpol mehr Sauerstoff entwickelt wird als am Südpol. (Zusatz bei der Korrektur.)

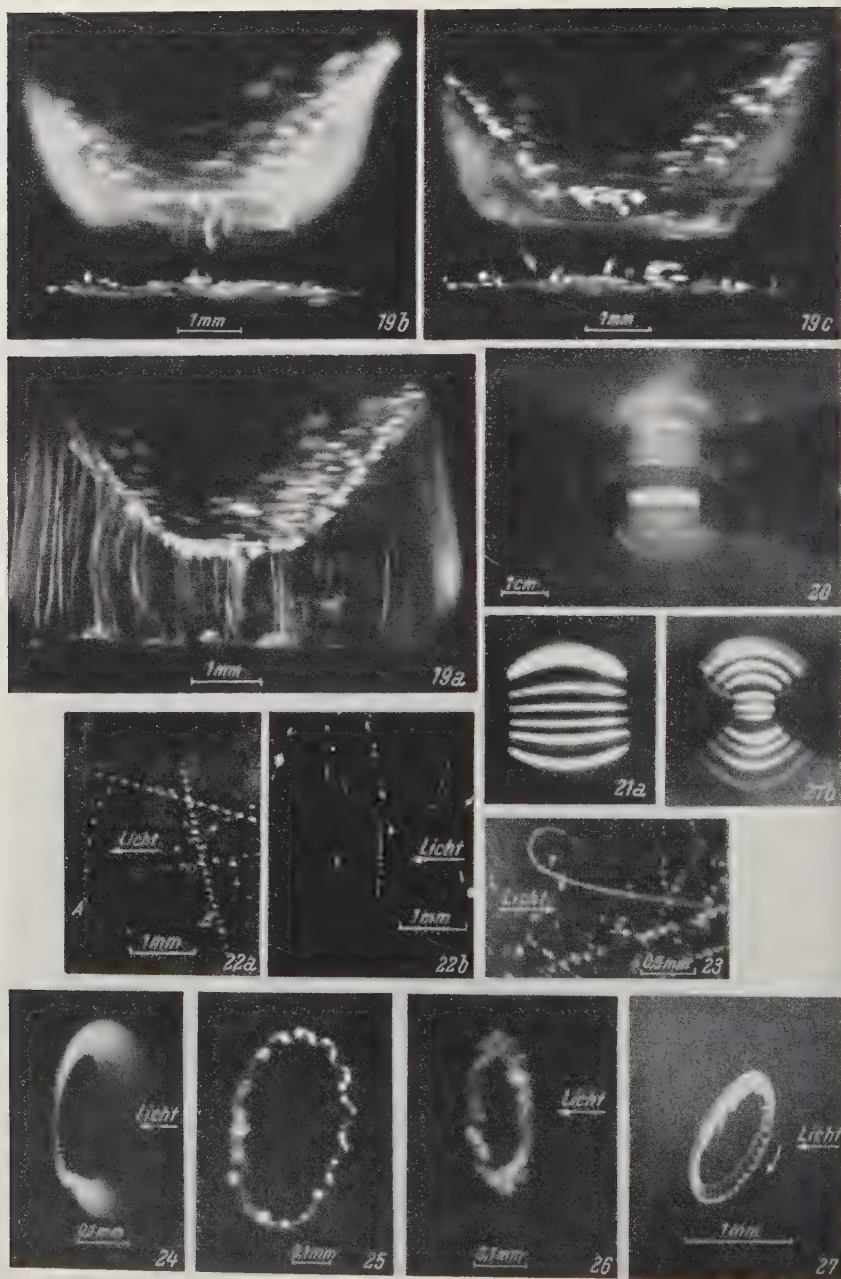


Abb. 19 a, b, c. Magnetische Zelle, die zwei Enden eines Stückes aus weichem schwedischem Eisen sind in angesäuertes Wasser getaucht. Plattenabstand 1,5 mm. (Das obere Ende ist kegelförmig abgedreht, um die Aufnahme zu erleichtern.) Bild 19 a: Das Eisenstück ist unmagnetisch. In dem chemischen Prozeß wird Wasserstoff entwickelt. Die Bahnen der aufsteigenden Gasblasen sind sichtbar. — Bilder 19 a und b: Das Eisen ist magnetisiert ( $0,4 \times 18.400$  Amperewindungen). Die Gasblasen kreisen um die Pole, wobei sie ihre Umlaufrichtung beim Umpolen reversieren. Einige Blasen werden gegen den Auftrieb nach unten geschleudert. Dies geschieht sowohl im zentralen Teil des Feldes (19 b), als auch im Randfeld (19 c, im linken Teil). Außer Wasserstoff entsteht auch etwas Sauerstoff. (Aufnahmen *Felix Ehrenhaft*.)

Abb. 20. Gasentladung; das Bild zeigt die Polschuhe des Elektromagneten, der als Kathode dient. Die Anode ist außerhalb des Bildes. Man erkennt Entladungsbahnen von Pol zu Pol entlang der magnetischen Kraftlinien. Zwischen den Polschuhen ist ein Messingstift angebracht, um die Gleichheit des elektrischen Potentials beider Pole sinnfällig zu zeigen. (Aufnahme *Margarete Stanek*.)

Abb. 21 a und b. Gasentladung; als Kathode dient ein permanenter Magnet. Die Polschuhe, in Bild a und b von verschiedener Form, sind mit einem dünnen festen Isolator (Nitrolack) abgedeckt, der einige Löcher besitzt. Aus diesen treten dauernde stationäre Entladungsbahnen aus, die entlang der magnetischen Kraftlinien von Pol zu Pol gehen. (Aufnahmen *Wilfried Bergmann*.)

Abb. 22 a und b. Graphit im Hochvakuum mit angeschlossenem aktivem Getter, Sonnenlicht. Bild 22 a: Die nach rechts gekrümmten Spuren A und B zeigen negative photophoretische Kraft auf diese Teilchen. Die Lichtknoten in den Spuren beweisen rasche Rotation (ungefähre Frequenzen: bei A 500/sec, bei B 3000/sec). Bild 22 b: Die nach links gekrümmte Spur in Bildmitte zeigt positive photophoretische Kraft auf das Teilchen. Rotationsfrequenz etwa 1500/sec. (Aufnahmen *Ernst Reeger*.)

Abb. 23. Graphit im Hochvakuum mit angeschlossenem aktivem Getter, Sonnenlicht. Die Probekörper waren ununterbrochen beleuchtet, vor der Kamera wurde die Belichtung zwecks präziser Zeitmessung 2400 mal pro Sekunde unterbrochen. Spur 1: Das Teilchen durchläuft eine Schleife, deren Form und Lage beweist, daß sie nicht durch die Schwerkraft zustande kommt. Spur 2: Rasche Achsenrotation des Teilchens an den Lichtknoten erkennbar. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

Abb. 24. Graphit in Luft, Druck 6 mm Hg, Sonnenlicht. Kreisendes Teilchen, aufgenommen im Mikroskop, Apertur 0.3. Der Feinbau der Bahn (Wendel) ist hier infolge der hohen optischen Auflösung besonders gut zu erkennen. Wegen der geringen Tiefenschärfe des Mikroskops ist nur die Vorderkante der Bahn scharf. Belichtung  $1/25$  Sekunde. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

Abb. 25. Graphit in Argon, Druck 6 mm Hg, Sonnenlicht. Teilchen mit drei Periodizitäten der Bewegung: 1. Umlauf im Kreis mit etwa 25/sec, 2. Wendel mit etwa 16 Windungen auf einem Kreisumfang, 3. Achsenrotation (etwa 4 Lichtknoten auf einer Schraubenwindung). Belichtung  $1/25$  Sekunde. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

Abb. 26. Silber in Luft, Druck 10 mm Hg, Sonnenlicht. Kreisendes Teilchen. (Die mangelhafte Schärfe der Aufnahme rührt von der notwendigen starken Vergrößerung her.) Belichtung  $1/25$  Sekunde. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

Abb. 27. Graphit in Argon, Druck 10 mm Hg, Sonnenlicht. Ein Teilchen beschreibt eine enge Kreisbahn mit einer Umlauffrequenz von etwa 300/sec. Diese Kreisbahn läuft ihrerseits etwa achtmal pro Sekunde auf einer schräg zum Lichtstrahl liegenden kreisähnlichen Bahn um. Belichtung  $1/5$  Sekunde. (Aufnahme *Ernst Reeger*.)

sind und des einen Nord-, des andern Südende in den Elektrolyten taucht [32], ist eine schon 1886 von *Th. Groß* entdeckte Erscheinung [78].

Ad 3. Während sich die im chemischen Prozeß entwickelten Gasblasen ohne Magnet nach den Gesetzen der Hydrodynamik bewegen, folgen sie bei der Magnetisierung nicht allein dem



Auftrieb, sondern sie bewegen sich selbst im innersten Bereich des Feldes teilweise so, als ob sie einen *Überschuß an nord- oder südmagnetischer Ladung* hätten. So kann z. B. beobachtet werden, daß Blasen gegen den Auftrieb abwärts gezogen werden (Abb. 19c, Abb. 7, rechts), oder daß welche an dem unteren Polschuh haften, solange das magnetische Feld aufrechterhalten wird; sobald man aber das Feld unterbricht, steigt ein großer Teil von ihnen auf Grund des Auftriebes. Es muß geschlossen werden, daß diese Gasblasen entsprechend ihrer magnetischen Ladung an dem unteren Polschuh festgehalten werden, während das Feld herrscht. Dies geschieht, sowohl wenn die untere Platte Nordpol als auch wenn sie Südpol ist. Es wurde z. B. folgendes beobachtet: Eine Gasblase befindet sich in der Mitte des unteren Nordpols. Sobald die Amperewindungen abgeschaltet werden und das Magnetfeld verschwindet, steigt die Gasblase auf Grund des Auftriebes und kommt in der Mitte der oberen Polschuhfläche zur Ruhe. Sobald aber das Feld wieder erregt wird (obere Platte Südpol), läuft die Blase gegen den Auftrieb wieder abwärts; macht man dagegen die obere Platte zum Nordpol, so bleibt die Gasblase dort. Sie trägt also südmagnetische Ladung.

Die verwendeten Polschuhe waren als Zylinder (6—12 mm Durchmesser) oder Kegelstumpfe (zur Erleichterung der Photographie) ausgebildet. Die polare Bewegung der Gasblase erfolgte auch im homogensten Teil des Feldes.

Ad 4. Gasblasen, die im chemischen Prozeß Eisen-Schwefelsäure entstanden sind, drehen sich bei Anlegen des Magnetfeldes um die Pole, u. zw. gegen den Uhrzeigersinn, wenn man gegen den Südpol blickt. Die Kreisbewegungen reversieren bei Kommulation des Magnetfeldes, die Geschwindigkeit steigt mit der Feldstärke.

Erwähnt sei ferner der Versuch, bei dem Gasblasen nicht nur durch den chemischen Prozeß, sondern durch Anlegen einer Spannung an die Polschuhe auch elektrolytisch erzeugt werden. Dann entstehen an einem Pol, je nachdem ob er Anode oder Kathode ist, Sauerstoff- oder Wasserstoffblasen. Sodann schließt man die Polstücke elektrisch kurz und legt ein Magnetfeld an. Auf diese Weise erhält man gleichzeitig im und gegen den Uhrzeigersinn laufende Blasen, deren Umlaufsrichtung mit dem Magnetfeld reversiert.

Es gibt eine große Mannigfaltigkeit von Rotationen der ganzen Flüssigkeit, der Gasblasen und kolloidaler Partikeln, die in der Flüssigkeit schweben [18, 19, 22, 26, 30, 99]. Ihre Erörterung fällt aber nicht in den Rahmen dieses Berichtes. Ehe ein abschließendes Urteil gegeben werden kann, sind noch weitgehende Untersuchungen zu machen.

## Magnetische Strahlung.

A. *Righi* hat eine Reihe von Entladungserscheinungen in Gasen beschrieben, die er als „magnetische Strahlen“ bezeichnete [80]. Er benützte verschiedene damals übliche Gasentladungsröhren und stellte dabei besonders dann eine Reihe merkwürdiger Erscheinungen fest, wenn er ein Magnetfeld in die Richtung der Kathoden-, bzw. Kanalstrahlen, also longitudinal, anlegte: 1. Der elektrische Ladungstransport wird durch das longitudinale Magnetfeld sowohl bei Kathoden- als auch bei Kanalstrahlen verändert [l. c., S. 170ff., S. 180ff.]. — 2. Mit wachsender Magnetfeldstärke ändert sich das elektrische Entladungspotential bald in der einen, bald in der andern Richtung [l. c., S. 219ff.]. — 3. Beim Auftreffen der „magnetischen Strahlen“ auf vielen Körpern wird eine Fluoreszenzerscheinung wie bei den Kathodenstrahlen beobachtet. Bevor aber bei Verringerung des Druckes die bekannte grüne Fluoreszenz auftritt, erscheint an der gleichen Stelle ein orangegelbes Leuchten [l. c., S. 323ff.]. — 4. Die „magnetischen Strahlen“ erlangen bei Anlegen eines longitudinalen Magnetfeldes eine größere Durchdringungsfähigkeit. Gegenüber der Kathode einer Gasentladungsröhre war eine dünne Aluminiumfolie ausgespannt. Ohne Magnetfeld wurde das von der Kathode ausgehende Lichtbündel glatt abgeschnitten. Wurde dagegen der Elektromagnet erregt, so verlängerte sich das Bündel magnetischer Strahlen, wenngleich geschwächt, über das Blättchen hinaus [l. c., S. 289ff.].

*Righi* selbst hatte mit der Deutung dieser Erscheinungen große Schwierigkeiten, und auch die Deutungsversuche anderer [81] brachten keine Klarheit. Im Zusammenhang mit dem Konzept der Existenz magnetischer Ladungen und neuer experimenteller Ergebnisse an Strahlungen erscheinen nun *Righi's* Versuche in ganz neuem Licht. Er hatte sicherlich recht, diese Strahlen als „magnetische Strahlen“ zu bezeichnen [72].

*Gasentladung mit einem Magneten als Kathode.*

F. Ehrenhaft, R. F. K. Herzog, M. J. Higatsberger, F. P. Viehöck und P. M. Weinzierl fanden [56, 66], daß in einer Glimmentladung bei mäßigem Vakuum (0,1 mm Hg) und einer elektrischen Spannung von 300 bis 600 Volt zwischen den auf gleichem elektrischem Potential befindlichen Polschuhen eines Elektromagneten, der als Kathode dient, bei erregtem Magnetfeld eine charakteristische Leuchterscheinung auftritt, wenn man die Polschuhe mit einer dünnen Schicht eines organischen Isolationsmaterials überzieht. Diese Leuchterscheinung wird von Strahlen verursacht, die weißen Fünkchen an den Polschuhen entspringen und den magnetischen Kraftlinien folgen (Abb. 20).



Sie unterscheidet sich distinkt von der Glimmentladung zwischen Anode und Kathode. Die Erscheinung ist auch dann noch vorhanden, wenn man die Polschuhe mit einem feinmaschigen Drahtnetz, das als Faradayscher Käfig wirkt, umgibt.

Untersuchungen mit einem Kathodenstrahloszillographen lieferten den Beweis, daß keine Hochfrequenzspannung vorhanden ist und somit auch nicht zur Deutung herangezogen werden kann. *F. Blaha* und *J. A. Schedling* wiederholten diese Versuche mit einem permanenten Alnicomagnet, wobei sie zum Abdecken der Polschuhe verschiedene Dielektrika (u. a. Azetonlack) verwendeten, und gelangten zu denselben experimentellen Ergebnissen (Abb. 21a und b) [68, 71].

Bei allen diesen Versuchen wird die *Righische* Fluoreszenzerscheinung beobachtet, wenn die Strahlen auf das Glas treffen. Die Analogie zwischen diesen und den *Righischen* Experimenten ist offenbar. Unter Anwendung des Begriffes der einzelnen Magnetpole ist eine einfache Deutung möglich, indem man annimmt, daß es sich um eine Strahlung handelt, die magnetische Ladung trägt: Am nordmagnetischen Ende des Eisenkernes ausgelöste Nordpole werden entlang der Kraftlinien zum Südpole bewegt, Südpole laufen entgegengesetzt.

Macht man, wie *W. Bergmann* dies getan hat, nicht den Magneten zur Kathode, sondern bringt eine gesonderte Kathode zwischen den Polschuhen so an, daß sie um  $45^\circ$  gegen die Feldlinien geneigt ist, dann beobachtet man den Austritt einer dreigeteilten Lichtspur: ein kurzer Strahl geht senkrecht zur Kathodenoberfläche geradeaus weg, ein zweiter verläuft in der Richtung der magnetischen Kraftlinien und der dritte windet sich in einer Schraubenbahn um den zweiten herum [71].

### *Der Einfluß eines longitudinalen homogenen Magnetfeldes auf radioaktive Strahlung.*

Von dem Gedanken des einzelnen Magnetpols geleitet, haben *F. Ehrenhaft*, *R. F. K. Herzog* und Mitarbeiter die Durchdringung der Materie durch radioaktive Strahlung untersucht [52]. Die Anordnung war folgende: Zwischen den Polschuhen eines großen Elektromagneten befindet sich ein  $\beta$ -strahlendes Präparat (RaE), ihm gegenüber eine photographische Platte, dazwischen ein Aluminiumabsorber. Ohne Magnetfeld wurde bei 24stündiger Exposition die Photoplatte bei einer Aluminiumdicke von 1,8 mm nicht mehr geschwärzt. In einem longitudinalen Magnetfeld von 11.000 Gauß wurde jedoch bei gleicher Expositionsdauer die Photoplatte noch bei einer Absorberdicke von 3,0 mm geschwärzt. *A. Cotton*, *E. Cotton* und *P. Tausin* glaubten diesen Effekt auf die Fokussierung der  $\beta$ -Strahlung im Magnetfeld zurückführen zu können [105]. Neue Versuche,

bei denen in der Belichtungsdauer sowohl die Konzentration der  $\beta$ -Strahlung im Magnetfeld als auch die Halbwertszeit des  $RaE$  berücksichtigt wurden, zeigten jedoch, daß die Erscheinung so nicht zu deuten ist [53].

Alle diese Tatsachen weisen darauf hin, daß es sich hier um eine generelle Ursache handelt; sie werden verständlich, wenn man einen beschleunigenden oder verzögernden Einfluß des homogenen Magnetfeldes sowohl bei den mikroskopischen Probekörpern als auch bei der Gasentladung und bei radioaktiver Strahlung annimmt, wenn für diese Körper  $\int \text{div } \mathfrak{B} d\tau \neq 0$  ist.

Fassen wir nun die bis jetzt bekannten Tatsachen, die für eine Existenz wahrer magnetischer Ladungen (einzelner Nord- und Südpole) sprechen, zusammen. Es sind also folgende sechs unabhängige Argumente:

I. Die Bewegung der Probekörper von sechs Freiheitsgraden, die der Wirkung einer Ladungskraft  $q\mathfrak{S}$  entspricht:

1. Bei gleichzeitiger Einwirkung von Licht.

a) Im homogenen Magnetfeld.

b) Im inhomogenen Magnetfeld, wo  $\mathfrak{S}$  parallel zu grad  $\mathfrak{S}^2$ .

c) Im inhomogenen Magnetfeld, wo  $\mathfrak{S}$  senkrecht auf grad  $\mathfrak{S}^2$ .

d) Im inhomogenen Magnetfeld um den linearen stromdurchflossenen Leiter ( $\mathfrak{S}$  senkrecht auf grad  $\mathfrak{S}^2$ ).

e) Im inhomogenen Magnetfeld einer stromdurchflossenen Schleife.

2. Im Dunkeln im homogenen Magnetfeld.

II. Die magnetische Umladung eines Probekörpers beim Kontakt mit der Zellenwand.

III. Die Ladungserhaltung beim magnetischen Burst.

IV. Die polare, der Wirkung einer Ladungskraft  $q\mathfrak{S}$  entsprechende Bewegung von Gasblasen in Flüssigkeiten.

V. Das Auftreten von Entladungsbahnen entlang der magnetischen Kraftlinien zwischen den zwei auf gleichem elektrischem Potential stehenden Polschuhen eines Magneten.

VI. Die Erhöhung der Durchdringungsfähigkeit radioaktiver Strahlung durch ein zur Strahlung paralleles (longitudinales) homogenes Magnetfeld.

Angesichts der Opposition, die die vom Verfasser ausgesprochene Entdeckung der einzelnen Magnetpole erfahren hat, mögen einige Worte der Abwehr diesen Abschnitt beschließen.

Mit bloßer Ungläubigkeit ist der Wissenschaft nicht gedient; man bringe Argumente gegen die vorgeschlagene Deutung oder gebe eine bessere. Es ist im übrigen ganz unrichtig, daß die

Annahme einer Unipolarität des Magnetismus eine grundsätzliche Änderung des heutigen Konzepts bedeutet; sie zwingt keineswegs zur Aufgabe bewährter Vorstellungen, sondern ist nur eine Erweiterung der Erkenntnis. Die heutige Theorie bietet der Einführung der einzelnen Magnetpole keinerlei Hindernis. Im Gegenteil, es haben ja schon viele Autoren den einzelnen Magnetpol theoretisch behandelt, z. B. *Heaviside*, *Hertz*, *Whittaker*, *Dirac*, *Page* und *Adams*. *E. Hlawka* hat kürzlich in so klarer Weise ausgeführt, daß man, wenn man die Existenz des Elektrons annimmt, auch annehmen muß, daß einzelne Magnetpole existieren können: Welche Theorie soll denn eigentlich gegen die einzelnen Magnetpole verteidigt werden? Auf die *Maxwell*-sche Theorie kann man sich nicht berufen; weil Differentialgleichungen vom Typ der *Maxwellschen* keine singulären Lösungen besitzen, können sie schon die Existenz des Elektrons nicht erklären. Die quantentheoretisch gefaßte Elektrodynamik, mit der man das Elektron behandeln kann, ist aber auf so weiten Voraussetzungen (Vertauschungsrelationen) aufgebaut, daß man auch die Möglichkeit der Existenz einzelner Magnetpole annehmen muß. Will man hingegen nicht die allgemeine Elektrodynamik, sondern die schon ganz spezielle Hypothese *Ampères* verteidigen, wonach aller Magnetismus der Materie von elementaren Kreisströmen herrühren soll, so möge man bedenken, daß ja schon das magnetische Moment der elektrisch ungeladenen Neutronen aus dem Rahmen fällt. Die *Ampèresche* Hypothese kann also heute ohnehin gar nicht mehr alle magnetischen Erscheinungen decken.

*P. A. M. Dirac* forderte aus quantentheoretischen Überlegungen den magnetischen Einpol [92] zu einer Zeit, da dieser schon im Experiment gefunden war [90], und ist kürzlich wieder darauf zurückgekommen [104]. *Dirac* ist aus theoretischen Gründen — es handelt sich übrigens um eine sehr grobe Abschätzung — der Ansicht, daß die Dissoziation der Materie in Nord- und Südpole erst bei einer Energie von 500 Millionen Elektronenvolt stattfinden soll. Unsere Experimente der Elektro- und Magnetophotophorese zeigen dagegen, daß die Dissoziation in Nord und Süd bei denselben niedrigen Energiestufen eintritt wie die Dissoziation in elektrisch Plus und Minus. Im übrigen ist zu betonen, daß die Entscheidung der ganzen Frage, ob es einzelne Magnetpole gibt oder nicht, bei welchen Energien sie ausgelöst werden können und welche Beträge sie haben, einzig und allein Sache des Experimentes und nicht der Theorie sein muß.

(Schluß folgt.)

# Der Magnet als Diakriter von Säure und Base.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von

**Felix Ehrenhaft und Felix Stockinger.**

I. Physikalisches Institut der Universität Wien.

Mit 6 Abbildungen.

(Eingelangt am 6. April 1951.)

## Zusammenfassung.

Im homogenen Magnetfeld rotieren Säuren, in Feldrichtung gesehen, gegen den Uhrzeigersinn, Basen im Uhrzeigersinn, wenn sie sich in direktem Kontakt befinden oder durch semipermeable Wände getrennt sind. Nach Ablauf einer für jedes Substanzpaar und jede Konzentration charakteristischen Zeit kommutieren beide Rotationen von selbst.

Die Hypothese der einzelnen nord-, bzw. südmagnetischen Pole hat den einen von uns vor ca. sechs Jahren<sup>1)</sup> zu nachfolgenden Versuchen geführt.

Ein Alnico-Magnet 5 — „60.000 Maxwell“ — wird mit zwei runden Polstücken versehen, die kegelstumpfförmig enden. Die einander gegenüberliegenden Kreisflächen haben einen Durchmesser von 5 mm und sind 1,5 mm voneinander entfernt. Diese horizontal gegenüberliegenden Polflächen werden mit einer elektrisch isolierenden Schichte von Picein bedeckt. Man gibt einen Tropfen konzentrierter Eisenchlorid-Lösung in das homogene Feld zwischen die Polschuhe des Magneten. Der Tropfen nimmt dort aus Gründen der Kapillarität die Form eines Katenoids an. Man kann in Dunkelfeldbeleuchtung an der kreisförmigen Bewegung der Eisenhydroxyd-Partikeln, die in einer solchen Lösung immer suspendiert sind, feststellen, daß der Tropfen sich gegen den Uhrzeigersinn dreht, wenn man in die Feldrichtung blickt, und daß der Drehungssinn unabhängig ist von der Richtung des beleuchtenden Strahles.

Verbindet man die Pole des Magneten mit einem Stück weichen Eisens (keeper), so nimmt die Winkelgeschwindigkeit

---

<sup>1)</sup> F. Ehrenhaft, *Physic. Rev.* 68, 102 (1945); *J. Physique et le Radium*, Sér. VIII, T. VIII, Févr. 1947, p. 5 S—6 S.



der Rotation um so mehr ab, je größer der Querschnitt des Keepers ist. Bei genügend großem Querschnitt hört die rotierende Bewegung des Tropfens gänzlich auf. Kehrt man bei Beobachtung desselben Tropfens den Magneten relativ zu den Polschuhen um 180 Grad, so reversiert der Drehungssinn des Katenoids<sup>2)</sup>.

Gibt man zu einem rotierenden Tropfen eine Lauge, z. B.  $\text{NH}_4\text{OH}$ , so nimmt die Rotationsgeschwindigkeit um so mehr ab, je mehr Lauge man zusetzt, bis die Rotationsbewegung überhaupt verschwindet. Setzt man noch mehr Lauge zu, dann beginnt sich der Tropfen im Uhrzeigersinn zu drehen.

Der Verfasser hatte erkannt, daß die Rotationsrichtung mit der chemischen Konstitution des Materials (sauer — alkalisch) im Zusammenhang stehe, daß aber diese Rotation weder durch

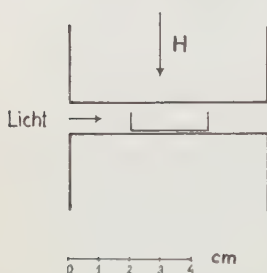


Abb. 1.

jene Bewegungen im Magnetfeld, die bereits *Faraday* und *Quincke* beschrieben hatten, noch durch das Gesetz von *Biot-Savart* und in Konsequenz von *H. A. Lorentz* ausgedeutet werden könne, daß also dieser rotierende Tropfen kein flüssiges *Barlowsches* Rädchen darstelle. Die Erscheinung könne also nicht durch unipolare Induktion im alten Sinne gedeutet werden.

Die Versuche wurden über Veranlassung *Ehrenhafts* nach seiner Rückkehr aus USA. wiederaufgenommen. *Stockinger* hat die saure und die basische Substanz im Mikromagneten<sup>3)</sup> übereinandergeschichtet. Wir haben sodann eine Anordnung zusammengestellt, so einfach, daß jedermann die Versuche mit den Hilfsmitteln jedes Laboratoriums in einer knappen Stunde wiederholen kann.

In die Mitte eines horizontalen Spaltes eines vertikalen, homogen wirkenden Magneten ( $\text{grad } H < 100 \text{ Örsted/cm}$ ), Polschuhdurchmesser 6 cm, Distanz der Polflächen 1 cm, Feld regulierbar und kommutierbar bis ca. 8000 Örsted, wird ein zylindrisches Glasgefäß gestellt, das oben offen ist (Abb. 1).

Beobachtet wird in Dunkelfeldbeleuchtung mit einem horizontal gerichteten Mikroskop kleinster Apertur oder mit freiem Auge.

### Versuch I.





Ia) Übersichtet man in beschriebener Anordnung  $1 \text{ cm}^3$  6 normaler KOH mit  $1 \text{ cm}^3$  6 normaler HCl, so beobachtet man, in die Feldrichtung blickend, eine Drehung der Base im Uhrzeigersinn und eine Drehung der Säure gegen den Uhrzeigersinn.

<sup>2)</sup> Diesen letzten Versuch hat *P. H. Plesch* (Manchester) vollführt.

<sup>3)</sup> *F. Ehrenhaft*, *Physic. Rev.* **63**, 461 (1943). Siehe auch *E. Reeger*, *Z. Physik* **71**, 649 (1931).

Die Drehgeschwindigkeit beträgt oft bis zu ca. 30 Umdrehungen pro Minute. Sie hängt bei den verschiedenen Flüssigkeiten von der elektrischen Leitfähigkeit beider Schichten ab, ferner natürlich von der inneren Reibung. Die untere Schicht bewegt sich wegen der Bodenreibung unter gleichen Umständen immer langsamer als die obere\*). Besonders schön wird das Phänomen, wenn man die Substanz etwa mit Lackmus rot, bzw. blau färbt. Der Rotationssinn kehrt mit Reversion des Feldes um.

Die im folgenden angeführten anderen Substanzen ergeben denselben Rotationssinn, nur variieren die Rotationsgeschwindigkeit und die Dauer der Vorgänge je nach der Substanz. Im nachfolgenden sind die Übersichtungen und die Rotationsrichtungen tabellarisch angeführt. Soweit nicht anders bezeichnet, sind die Konzentrationen 6 normal.

	HCl	HCl	HCl	HNO <sub>3</sub>	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>
	NaOH	NH <sub>4</sub> OH	KOH	KOH	KOH
	NH <sub>4</sub> OH	NaOH	KOH	NH <sub>4</sub> OH	NH <sub>4</sub> OH
	CH <sub>3</sub> COOH	HJ (6,9 n)	HJ (6,9 n)	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	HNO <sub>3</sub>

Alle bisher untersuchten Säuren rotieren also anfangs gegen den Uhrzeigersinn; die Basen im Uhrzeigersinn, wenn man in die Richtung des Feldes blickt.

Es muß bemerkt werden, daß z. B. im Fall H<sub>3</sub>PO<sub>4</sub> über KOH die Rotationsrichtung in einem Konzentrationsintervall von 3 normal bis 35 normal erhalten blieb.

In ca. 5 bis 20 Minuten nach der Übersichtung findet eine Umkehr des Rotationssinnes beider Flüssigkeiten statt. Diese Umkehr erfolgt in der ganzen Flüssigkeit nicht auf einmal, sondern es kehrt zunächst der oberste Teil der oberen Schicht um; sodann setzt sich die Umkehr langsam von oben nach unten fort, bis auch die unmittelbar an den Gefäßboden angrenzende Flüssigkeitsschicht der ursprünglichen Richtung entgegengesetzt verläuft.

Die Drehbewegung verlangsamt sich kontinuierlich und kommt nach 30 bis 100 oder noch mehr Minuten, wenn die Flüssigkeit keine wesentlichen Konzentrationsunterschiede mehr aufweist, zum Stillstand.

Während kurz nach Übersichtung von NaOH und HCl Temperaturunterschiede bis zu 1°C sowohl in radialer Richtung in der Grenzfläche wie auch in vertikaler Richtung festgestellt

\*) Es wurden in manchen Fällen Drehungen beider Schichten in gleicher Richtung beobachtet, z. B. 4 n Weinsäure über 6 n KOH gegen den Uhrzeigersinn oder 6 n NH<sub>4</sub>OH über 6,9 n HJ im Uhrzeigersinn. Wir konnten aber durch Anwendung der *Stokes-Navierschen* Gleichungen der Hydrodynamik ergründen, daß es sich hier um eine Mitnahme der zäheren Schicht durch die weniger zähe handelt.

werden konnten\*\*), können nach ca. 60 Minuten keine Temperaturdifferenzen größer als  $0,01^{\circ}\text{C}$  mehr festgestellt werden. Zu dieser Zeit ist jedoch noch eine deutliche Drehung merkbar.

Es wurde ferner festgestellt, daß der ganze Vorgang unabhängig von der Art des Gases (O oder N) über der Flüssigkeit ist.

Ib) Überschichtet man Säure oder Base (gelöst oder fest) mit destilliertem Wasser, so treten ebenfalls gesetzmäßige Rotationserscheinungen auf, die aber wesentlich schwächer verlaufen. Z. B. unter vielen anderen:  $\text{H}_2\text{O}$  über 34 normaler  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  über 12 normaler  $\text{NaOH}$  oder  $\text{H}_2\text{O}$  über einer  $\text{KOH}$ -Granulie.

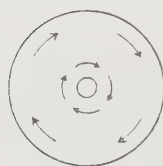


Abb. 2.

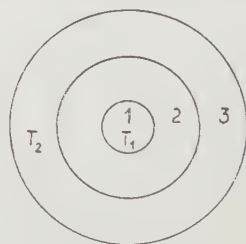
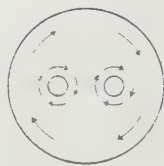


Abb. 3.

### Versuch II.

Die erwähnten Versuche sind alle in einfach zusammenhängenden Räumen ausgeführt worden. Es ist von Interesse, die Versuche auch in zweifach und dreifach zusammenhängenden Räumen auszuführen. Zu diesem Behufe werden Gefäße verwendet, die, von oben betrachtet, die in Abb. 2 dargestellte Form haben.

Bei Beobachtung der Rotationsversuche muß man von unregelmäßigen anfänglichen Vorgängen beim Einschalten des Magnetfeldes absehen und nur den stationären Zustand betrachten. In diesem muß festgestellt werden, daß in allen Fällen, sowohl im zweifach wie dreifach zusammenhängenden Raum, der Rotationssinn an der inneren und äußeren Berandung der gleiche ist, wie Abb. 2 darstellt. Dieser Rotationssinn kommutiert mit dem Magnetfeld. Der ganze Vorgang bezieht sich sowohl auf die obere wie auf die untere, entgegengesetzt laufende Schicht, also auf Säure und Base.

\*\*) Diese Temperaturmessung und ebenso die im folgenden beschriebenen wurden von *H. Krenn* und *F. Stockinger* mit Hilfe von genügend kleinen Thermoelementen gemessen, die von den Flüssigkeiten elektrisch und chemisch isoliert waren.

### Versuch III.

IIIa) Man stellt drei verschieden große Gefäße ineinander (Abb. 3). Man füllt das innere Gefäß 1 mit Wasser, etwa von der Temperatur  $T_1 = 100^\circ$ ; das äußere Gefäß 3 mit Eiswasser von der Temperatur  $T_2 = 0^\circ$ . Im mittleren Raum 2 überschichtet man Säure und Base. Man erhält so Rotationen, die der angegebenen Regel entsprechen. Kühlt man jedoch Gefäß 1 mit kaltem Wasser und erhitzt Gefäß 3 durch heißes Wasser, so reversieren die Rotationen der übereinandergeschichteten Säuren und Basen mit der Reversion des Temperaturgradienten und überdies mit der Reversion des Magnetfeldes. Diese Umkehr konnte noch bei radialen Temperaturunterschieden von  $0,02^\circ\text{C}$  an der Grenzfläche von  $6n$  HCl und  $6n$  KOH beliebig oft einwandfrei festgestellt werden. Bei Wiederholung des Versuches III mit nur einer Schicht (Säure oder Base) konnten keine Rotationen festgestellt werden.

IIIb) Kühlt man von den drei ineinandergestellten Gefäßen das innerste und das äußerste (1 und 3) mit Wasser von gleicher Temperatur ab ( $T_1 - T_2 = 10^\circ$ ) und füllt das mittlere Gefäß in bekannter Weise mit übereinandergeschichteter Säure und Base, z. B. HCl und KOH, so erhält man zunächst im Raum 2 der Abb. 3 an den Berandungen entgegengesetzte Rotationen, die bei diesen Substanzen ca. 20 Minuten andauern. Dann breitet sich die innere Zone nach außen aus und alle Schichten bewegen sich wie im normalen Gefäß nach der Umkehr, d. h. die Säure rotiert im Uhrzeigersinn, die Base gegen den Uhrzeigersinn. Die Rotationen erfolgen aber im stationären Zustand im zweifach zusammenhängenden Raum innen und außen in gleicher Richtung, u. zw.  $1\frac{1}{2}$  Stunden lang (Abb. 2). Ebenso verläuft der Effekt im dreifach zusammenhängenden Raum.

IIIc) Die in Abb. 1 dargestellte Schale wird an der Bodenfläche auf  $90^\circ$  in heißem Wasser erhitzt, so daß der Temperaturgradient in die Richtung des magnetischen Feldes fällt. Auch in diesem Fall konnten wir bei Füllung des Gefäßes mit einer Substanz keine Drehung beobachten. Ausschlaggebend ist also der Temperaturgradient senkrecht zum Magnetfeld und ein vertikales Konzentrationsgefälle.

### Versuch IV.

In einem Gefäß von 7 cm Durchmesser wurde HCl und KOH überschichtet und zentrisch auf das 14 mm dicke Polstück des eingangs beschriebenen Mikromagneten gestellt. Auch in diesem Fall ergaben sich Rotationen zwischen den Polstücken, was gegen Randwirkungen irgendwelcher Art spricht.



### Versuch V.

Die Drehungen der Flüssigkeiten und die Temperaturdifferenzen im Gefäß sind fast ebenso stark, wenn die Elektrolyten durch dünne semipermeable Membranen (Cellophan, Hausenblase usw.) getrennt werden.

### Diskussion.

Auch die neuartigen, vorangeführten Versuche I, II, III, IV, V führen zum Schluß, daß die von *Faraday* und *Quincke* angegebenen Bewegungen im Magnetfeld diese Erscheinungen nicht deuten können.

Im speziellen müssen wir uns aber neuerdings fragen, ob die beschriebenen Säure-Base-Rotationen nicht doch als *Barlowsche* Rädchen ohne äußere Elektroden, also durch die *Biot-Savart-Lorentzsche* Kraft gedeutet werden können (unipolare Induktion im alten Sinn).

In diesem Zusammenhang sei erinnert, daß die flüssigen *Barlowschen* Rädchen dadurch gekennzeichnet sind, daß ein zweifach zusammenhängender zylindrischer Raum mit metallischen, voneinander elektrisch isolierten konzentrischen Zylindermantelflächen mit einer elektrisch leitenden Flüssigkeit gefüllt wird und daß diese Flüssigkeit im zweifach zusammenhängenden Raum mit vertikalem Magnetfeld und elektrischer Spannung kommutierbar rotiert<sup>4)</sup>.

In unserem Fall könnten als Antrieb für ein solches *Barlowsches* Rädchen thermomagnetische, thermoelektrische Effekte oder Konzentrationsketten in Frage kommen.

Ganz klar ist, daß durch Übereinanderschichten chemische Reaktionen vor sich gehen. Diese sind in der Grenzfläche besonders stark und erzeugen dort eine Erwärmung, so daß ein Temperaturgradient sowohl in vertikaler wie auch in radialer Richtung vorhanden ist. Der Temperaturunterschied zwischen dem Mittelpunkt der Grenzfläche von Säure und Base (6*n* HCl über 6*n* NaOH) und einem Umfangspunkt derselben betrug zu Beginn ca. 1° C, ebensoviel wurde für die maximale Differenz in vertikaler Richtung erhalten. Trotz dieser kleinen Temperaturunterschiede ist z. B. eine Zurückführung auf thermoelektrische Ströme nicht von der Hand zu weisen, wenn man die von *W. Duane*<sup>5)</sup> angegebene Tatsache berücksichtigt, daß in einem Elektrolyten bei Vorhandensein eines Temperaturgefälles Spannungen beobachtet werden können, die die nach der *Nernst*-schen Theorie berechneten Thermospannungen an Grenzflächen verschiedener Elektrolyten oft um das Zehnfache übertreffen.

<sup>4)</sup> *J. C. Poggendorf*, Pogg. Ann. 77, 1 (1849); *P. A. Bertin*, Ann. Chim. et Phys. IV 16, 74 (1869); *E. Riecke*, Wie. Ann. 25, 496 (1885).

<sup>5)</sup> *W. Duane*, Wie. Ann. 65, 374 (1898).

Um die beobachteten Bewegungen auf solche Weise erklären zu können, müßten elektrische Ströme so verlaufen wie die im Modell 1, Abb. 6, gezeichneten elektrischen Feldlinien. Durch diese Ströme entstehen kreisförmige magnetische Feldlinien.

Der thermomagnetische Effekt scheidet auf Grund des mit einer Schicht ausgeführten Versuches IIIa) und IIIc) aus.

Gegen eine Erklärung durch den thermoelektrischen Effekt allein, der anfangs beteiligt sein mag und der den Versuch IIIa) befriedigend erklärt, spricht der stationäre Endzustand des Versuches IIIb) und der Versuch IV.

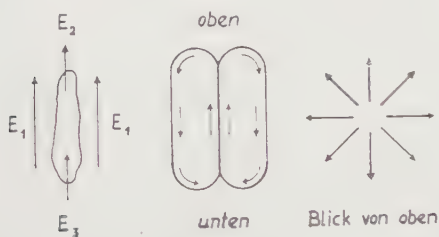


Abb. 4.



Abb. 5.

Gegen eine Erklärung durch radiale Konzentrationsunterschiede scheint ebenfalls Versuch IV zu sprechen. Man darf aber nicht außer Auge lassen, daß die in Versuch I erwähnte Umkehr des Drehsinnes durch radiale Konzentrationselemente hervorgerufen werden könnte, welche durch anfangs fließende radiale Ströme erzeugt werden könnten. Diese Frage bedarf weiterer Untersuchung.

Eine andere Art von Konzentrationsketten, die zunächst denkbar wäre, aber durch Versuch III widerlegt wird, entstünde unter folgender Annahme: Die Reaktion beginnt zunächst an bestimmten Zentren (Abb. 4). Dort verbinden sich Säure und Base und bilden eine neue Substanz. Die Summe der vertikal gerichteten elektrischen Spannungen  $E_2$  und  $E_3$  an den Grenzflächen einer solchen Substanz wäre eine andere als an den Stellen, wo Säure und Base noch unmittelbar benachbart sind. Es entsteht also dort ein Linienintegral der elektrischen Feldstärke, das  $\neq 0$  ist (Lokalelement). Durch diese elektrischen Ströme werden im Magnetfeld Flüssigkeitswirbel entstehen, die sich zu einem Gesamtwirbel der Flüssigkeit vereinigen, die aber im zweifach zusammenhängenden Raum an der äußeren Berandung entgegengesetzt verlaufen müssen wie an der inneren. Der Versuch II lehrt aber, daß im stationären Zustand die Flüssigkeit sowohl im zweifach wie im dreifach zusammenhängenden Raum an der äußeren und inneren Berandung im gleichen Sinne rotiert, wenn das Magnetfeld eingeschaltet ist (Abb. 2). Damit ist unzweideutig

bewiesen, daß die Erscheinung nicht auf eine solche Wirbelbildung zurückgehen kann\*).

Bei Versuch I wurde beobachtet, daß die Säure im Gegenzeigersinn, die Base im Uhrzeigersinn rotiert. In Verbindung mit der bekannten Tatsache, daß sich beim Überschieben die Base positiv und die Säure negativ auflädt, wird eine Deutung durch ringförmige elektrische Kraftlinien im Spalt des Magneten nahegelegt (Modell 2, Abb. 6). Der Drehsinn stimmt auch mit

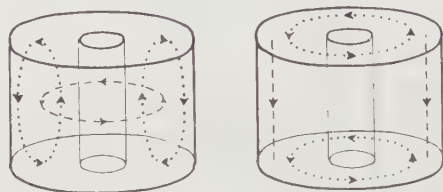


Abb. 6. Modell 1:  $\text{div } H = 0$ . Modell 2:  $\text{div } H \neq 0$ .

$E$ : .....

$H$ : .....

der Regel von *Ampère* überein. Um aber die Umkehr zu erklären, müßte man allerdings elektrische Umladung beider Schichten annehmen. Diese Frage bedarf weiterer Untersuchung.

Modell 2 scheint aber vielleicht von einem viel allgemeineren Standpunkt aus durch die Tatsache nahegelegt, daß sowohl *Ehrenhaft* als auch *Stockinger* unabhängig voneinander (beide auch durch Mikrophotographie) festgestellt haben, daß Metallpartikeln in Gasen auch ohne Licht beim Fallen in einem Magnetfeld regelmäßige Schraubenbahnen um die Feldrichtung beschreiben, während sie ohne Magnet in geradlinigen Bahnen fallen<sup>6)</sup>. Daraus muß auf eine drehende Wirkung im Spalte des homogenen Magneten geschlossen werden. Welcher Theorie man auch huldigen mag, fest steht, daß die neu aufgefundene Erkenntnis, daß in der Säure-Base-Kombination im homogenen Magnetfeld, in die Feldrichtung blickend, die Säure sich gegen den Uhrzeigersinn, die Base im Uhrzeigersinn dreht, der Hypothese der einzelnen nord- oder süd magnetischen Pole entsprang.

Wir danken Herrn *Helmut Krenn* für zielbewußte Mitarbeit.

Gründonnerstag 1951.

\*) Wir erinnern an eine Analogie, daß z. B. eine zweifach zusammenhängende magnetische Doppelfläche (Abb. 5) mit gleicher Polstärke (Divergenz  $B = 0$ ) in ihrer Wirkung nach außen nur durch *Ampèresche* Randströme ersetzt werden kann, die an den Berandungen entgegengesetzt fließen.

<sup>6)</sup> *F. Ehrenhaft*, *Physic. Rev.* **67**, 63 (1945), *C. r.* **224**, 1151 (1947), *Acta Physica Austriaca* 1951 (im Druck); *F. Stockinger*, *Acta Physica Austriaca* (im Druck).

Bericht über die  
**Österreichische Physiker-Tagung in Graz**  
am 8. und 9. Dezember 1950  
und die Gründung der  
**Österreichischen Physikalischen Gesellschaft.**

Zusammengestellt von **A. Smekal**, Graz.

Aus Anlaß des 80. Geburtstages von Prof. Dr. *Hans Benndorf* hatten die physikalischen Institute der Grazer Hochschulen zu einer Physiker-Tagung eingeladen, die am 8. und 9. Dezember 1950 im großen Hörsaal des Physikalischen Institutes der Universität stattfand und zu der die physikalischen Lehrkanzeln der österreichischen Hochschulen insgesamt 45 Vortragsanmeldungen beige-steuert hatten. Dem regen Interesse an ihrem Zustandekommen entsprach der starke Besuch dieser ersten nach dem Kriege abgehaltenen österreichischen Physiker-Zusammenkunft durch etwa 50 auswärtige und viele Grazer Teilnehmer, darunter zahlreiche Mittelschulprofessoren und Studierende der Grazer Hochschulen. Die Unterbringung der auswärtigen Teilnehmer erfolgte durch das Steiermärkische Landesreisebüro. Die Teilnahme an der Tagung war kostenlos. Die geringen Auslagen der Organisationsarbeit sind dankenswerterweise vom Bundesministerium für Unterricht übernommen worden.

Im Mittelpunkt der Tagung stand die *Feier des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Hans Benndorf* durch die österreichische Physikerschaft. Sie wurde eröffnet durch den Institutsvorstand, Prof. *Smekal*, mit dem Dank und den Glückwünschen des Institutes, das Prof. *Benndorf* so viele Jahre hindurch geleitet, gefördert und beraten hat. Dann sprachen Prorektor Prof. *Musger* namens der Universität, Dekan Prof. *Spreitzer* für die Philosophische Fakultät, Prof. *Ficker* namens der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Prof. *Steinmaurer* für die Innsbrucker Universität. Die dem Forscher, Lehrer und Freunde gewidmete Festrede hielt der Vorstand des Physikalischen Institutes der Technischen Hochschule Graz, Prof. *Kohlrausch*, und überbrachte das Festheft der „Acta Physica Austriaca“



mit den Glückwünschen der Herausgeber, des Schriftleiters und des Verlages<sup>1)</sup>. Die besonderen Verdienste von Prof. *Benndorf* um das Gebiet der Luftelektrizität und der Seismik würdigte Prof. *Steinhauser* und übermittelte ein aus Arbeiten führender Luftelektriker der ganzen Welt bestehendes Festheft des „Archivs für Meteorologie, Geodynamik und Bioklimatologie“. Als Vertreter des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen sprach Dozent *Fuchs*. Nach Verlesung telegraphischer und brieflicher Glückwünsche aus England, Deutschland und der Schweiz nahm Prof. *Benndorf* selbst das Wort und erwiderte den Vorrednern. Er gedachte insbesondere seiner Lehrer und Förderer und dankte seinen langjährigen Grazer Assistenten Prof. *Rumpf* und Frau Prof. *Székely* für ihre Mitarbeit. Es war bewundernswert, mit welcher Frische der Achtzigjährige am gesamten wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Verlauf der Tagung teilnahm, die so stark unter dem Eindruck seines Interesses stand, daß jeder Vortragende, ob alt oder jung, seine Ausführungen mit einem verehrenden Wort an ihn begonnen hat.

Aus Anlaß der Tagung gab der Landeshauptmann von Steiermark, *Josef Krainer*, im Weißen Saale der Grazer Burg einen Empfang, auf dem er die Physiker begrüßte und Prof. *Benndorf* für seine 45jährige Tätigkeit den Dank und die Glückwünsche des Landes aussprach.

Bei der Begrüßung der Tagungsteilnehmer am Beginne der ersten Vortragssitzung konnte Prof. *Smekal* ferner Prof. Dr. *Erwin Lohr* (Werfenweng, früher Brunn) beglückwünschen, der am 1. Dezember 1950 seinen 70. Geburtstag gefeiert hatte, und des 60. Geburtstages von Prof. Dr. *Robert Ettenreich* (1. November 1950) gedenken, der durch ein schweres Leiden an der Teilnahme verhindert war<sup>2)</sup>.

Am Beginne des zweiten Sitzungstages war eine längere Aussprache vorgesehen, als deren Ergebnis die Gründung einer „Österreichischen Physikalischen Gesellschaft“ beschlossen wurde, der die „Acta Physica Austriaca“ als Gesellschaftsorgan dienen sollen. Der 80. Geburtstag von Prof. *Benndorf* am 13. Dezember 1950 wurde als Gründungstag bestimmt. Als Vorsitzender der neuen Gesellschaft wurde Prof. *Kohlrausch* (Graz) gewählt, als sein Stellvertreter Prof. *Flamm* (Wien).

Der Inhalt der zu der Tagung angemeldeten Vorträge ist nachstehend durch Kurzberichte wiedergegeben, die von den Autoren zur Verfügung gestellt wurden.

<sup>1)</sup> Vgl. Acta Physica Austriaca, Bd. IV, Heft 2/3, 1950.

<sup>2)</sup> Diesem Leiden ist Prof. *Ettenreich* am 7. Januar 1951 erlegen, wodurch die österreichischen Physiker einen überaus schmerzlichen Verlust erfahren haben.

Freitag, 8. Dezember 1950, vormittag (Vorsitz *Smekal* Graz):

1. *L. Flamm* – Wien. **Das elektrische Feld bewegter Ladungen.**

Der Vortrag brachte das Wesentliche der Arbeit von *L. Flamm*, Zustandekommen der *Hertz*schen Dipolstrahlung, Elektrotechnik und Maschinenbau 66, 155–159 (1949). Dort sind nur unendlich kleine Schwingungen des strahlenden Elektrons berücksichtigt. Herr *Bomze*, ein Schüler des Vortragenden, hat inzwischen allgemeinere Elektronenbewegungen in Rechnung gestellt.

2. *R. Steinmaurer* Innsbruck. **Über ein Niederfrequenz-Reizgerät für medizinische Zwecke.**

In Weiterführung einer von *D. Sunstein* stammenden Idee wurde ein Gerät entwickelt, das elektrische Impulse beliebiger Kurvenform zu erzeugen gestattet. Die gewünschte Kurvenform wird als Schablone vor den Leuchtschirm einer Kathodenstrahlröhre gebracht, der eine Photozelle gegenübersteht. Durch Verwendung eines besonderen Kippgerätes ist es möglich, den Impulsabstand beliebig zu variieren, unabhängig von Form und Dauer der einzelnen Impulse. — Bei der Ausführung zu beachtende Momente und Verwendungsmöglichkeiten werden diskutiert.

3. *A. Székely* Graz. **Beobachtungen an einer Gastriode** (mit Vorführungen).

Die Überlagerung einer Wechselspannung der Frequenz von 1000 bis 2000 kHz über die Gleichspannung, die zur Aufrechterhaltung der Entladung in einer mit Helium vom Druck 1 Torr gefüllten Triode nötig ist, führt zu einer niederfrequenten Modulation der hochfrequenten Spannung, wie sich mit einem Kathodenstrahloszillographen und auch mit einem Telefon nachweisen läßt. Zur Aufklärung dieser Erscheinung können die Spannungskurven dienen, die bei Überlagerung einer Wechselspannung von Hörfrequenz über die konstante Brennspannung entstehen. Diese Kurven zeigen in der Flußrichtung Spitzen, die durch stoßweise Beförderung negativer Ladung auf die Anode zustande kommen. Es ist zu vermuten, daß ein Abreißen von Elektronen, die in negativen Ionen locker gebunden sind, erfolgt. Die Erscheinungen bei Hochfrequenz sind dann wahrscheinlich dadurch verursacht, daß die locker gebundenen Elektronen in Resonanzschwingungen geraten und dabei abreißen.

Freitag, 8. Dezember 1950, nachmittag (Vorsitz *Flamm* Wien, *Karlik* – Wien):

4. *F. Ehrenhaft* Wien, bzw. USA. **Die Photophorese bei vermindertem Druck und auch im höchsten Vakuum.**

Der Vortragende besprach die Bewegung von kleinen Teilchen, parallel zu einem Lichtstrahl in der Fortpflanzungsrichtung und gegen diese, und das Vorhandensein derartiger „lichtpositiver“ und „lichtnegativer“ Bewegungskomponenten im Hochvakuum von  $10^{-6}$  mm Hg an entgasten Probekörpern; das Auftreten stationärer, stabiler Umlaufbahnen in konzentrierten Lichtbündeln bei mäßigen Vakuis, die Typen dieser Bahnen (Kreiswenden, periodische Schraubenbahnen, Epizykel usw.), ihre Gesetzmäßigkeiten und ihre Reaktionen auf Variationen der Versuchsbedingungen.

5. *E. Reeger* – Wien. **Über die transversale Photophorese.**

An einer in letzter Zeit entwickelten einfachen Versuchsanordnung läßt sich an in verdünntem Gase suspendierten Teilchen die bereits seit langem bekannte Erscheinung der transversalen Photophorese (*F. Ehrenhaft*,

1929) auch dem unbewaffneten Auge sichtbar machen. Sie zeigt sich am deutlichsten an Teilchen, die in einem horizontalen Lichtstrahl gegen die Schwere nach oben gedrückt werden und dann am oberen Strahlrand verharren; diese führen dann Rotationsbewegungen oder kleine Umlaufbewegungen um eine vertikale Achse aus, zum Teil auch pendelnde Bewegungen in vertikaler Richtung. Die transversale Photophorese ist von einer durch das erdmagnetische Feld hervorgerufenen Magnetophotophorese sehr wohl unterscheidbar.

#### 6. B. Karlik Wien. Über die Möglichkeit, heute in Österreich mit Radio-Isotopen zu arbeiten.

Es wurde berichtet, daß mit den zuständigen britischen Stellen die Vereinbarung getroffen worden ist, daß das Institut für Radiumforschung der Akademie der Wissenschaften in Wien mit der Verteilung der Radioisotope aus dem Atomic Research Establishment in Harwell (England) für ganz Österreich betraut wird. Damit hat das Institut auch die Aufgabe übernommen, die an der Verwendung interessierten Wissenschaftler in die neue Methode einzuführen, zu beraten und über die gesundheitlichen Gefahren aufzuklären. Die Rockefeller Foundation hat eine namhafte Summe zur Verfügung gestellt zur Bestreitung der Kosten für Material und Transport für die österreichischen Forschungsinstitute und in beschränktem Maße auch für die Kliniken und Spitäler für therapeutische Zwecke, so daß den österreichischen wissenschaftlichen Interessenten nur geringe administrative Spesen erwachsen. Eine größere Zahl von Instituten sowie Kliniken und Spitälern hat die Arbeit auf dem neuen Gebiete bereits aufgenommen.

#### 7. K. Lintner -Wien. Wirkungsquerschnitt schneller Neutronen.

Durch den Spaltprozeß des  $^{238}\text{U}$  hat man die Möglichkeit, schnelle Neutronen oberhalb einer Energie von 1 MeV energieunabhängig nachzuweisen. Von G. Stetter und K. Lintner wurde während des Krieges eine Methode entwickelt, um Querschnitte schneller Neutronen zu messen. Mit einer Uranionisationskammer kann man die Abnahme der spaltfähigen (schnellen) Neutronen in verschiedenen Absorbern messen. Wählt man den Absorber kugelsymmetrisch und verlangsamt die austretenden Neutronen und weist sie mit „thermischen Indikatoren“ nach, so kann man die Abnahme durch echte Absorption und unelastische Streuung trennen. Genau so gelingt eine Trennung von Absorption und  $n,2n$ -Prozeß durch Verwendung verschieden energiereicher Neutronenquellen.

#### 8. F. Cap -Innsbruck. Über die Elektronenhülle der Transurane.

Das chemische Verhalten der Elemente mit einer Ordnungszahl größer als 93 gab zu Kontroversen darüber Anlaß, wie diese Elemente in das Periodische System einzuordnen wären. Da bisher keine theoretischen Arbeiten über diese Frage bekannt wurden, hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, unter Zuhilfenahme des Hartree-Verfahrens und des Abschätzungsverfahrens nach Slater die Elektronenkonfiguration der Transurane zu berechnen. Die nach dem Slaterschen Verfahren gewonnenen Ergebnisse scheinen durchwegs die ältere Auffassung zu bestätigen, indem sie eine Aktinidengruppe erst ab Plutonium zulassen. Die nach der Hartree-Methode zu gewinnenden Ergebnisse werden die endgültige Entscheidung erbringen können; die von mehreren Studenten durchgeführten, sehr umfangreichen Rechnungen konnten jedoch noch nicht abgeschlossen werden.

#### 9. F. Hawliczek, H. Felber und R. Valenta—Wien (vorgetragen von F. Hawliczek). Über die Sekundärelektronen-Emission von Silber-Magnesium- und Silber-Aluminium-Legierungen.

Es wurde die Formierung der Oberfläche von Silber-Aluminium- und Silber-Magnesium-Legierungen untersucht. Der Formierungsprozeß, welcher



normalerweise durch Erhitzen der Legierungen in einer Sauerstoffatmosphäre bei einem Druck von 0,3 mm Hg auf 400° C erfolgt, wird in drei Einzelphasen zerlegt. Es konnte dabei gezeigt werden, daß den größten Beitrag zur Steigerung des Sekundäremissionsfaktors die Oxydation der Oberfläche der Legierungen liefert, während die Anreicherung des Magnesiums, bzw. Aluminiums an der Oberfläche der Legierung, sowie die Änderung der Kristallstruktur einen weit geringeren Anteil zur Erhöhung des Sekundäremissionsfaktors beitragen.

10. W. Glaser—Wien. **Zur Herleitung der Schrödingerschen Wellengleichung.**

Ausgehend von der Erhaltung der Teilchenzahl, wird die zeitabhängige *Schrödinger-Gleichung* als Verallgemeinerung der *Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung* aufgefaßt. Diese Herleitung hat folgende Vorzüge: 1. Die zeitabhängige *Schrödinger-Gleichung* ergibt sich in natürlicher Weise auf direktem Wege. 2. Der Erhaltungssatz ist von vornherein gesichert. 3. Die klassische Mechanik erscheint unmittelbar als Grenzfall der Wellenmechanik und ihre Gültigkeitsgrenzen treten in durchsichtiger Weise zutage. 4. Die *Schrödinger-Gleichung* des Magnetfeldes ergibt sich in zwingender Weise ohne Verwendung der formalen Operatorenrechnung. Ebenso 5. die Formulierung für ein Mehrteilchenproblem in generalisierten Koordinaten.

**Diskussion:** E. Lohr—Werfenweng. Glaser wählt als neuartigen Ausgangspunkt einen Erhaltungssatz. Seine weiterhin folgenden Überlegungen verlaufen dann weitgehend analog jenen, die auch ich schon in der ersten Auflage meiner „Vektor- und Dyaden-Rechnung“ (1939) zur Herleitung der *Schrödinger-Gleichung* aus der *Hamilton-Jacobischen* verwendet habe. Denselben Zusammenhang erörtert 1940 M. Planck in seiner Abhandlung „Versuch einer Synthese zwischen Wellenmechanik und Korpuskularmechanik“. — W. Glaser—Wien. Der wesentliche Punkt meiner Herleitung ist, daß diese von vornherein die Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit zum Ziele hat und damit den Erhaltungssatz zum Ausgangspunkt wählt. Die physikalische Bedeutung der Lösung der auf diese Weise hergeleiteten *Schrödinger-Gleichung* ist daher von vornherein gegeben. Hierin scheint mir der Hauptvorteil meiner Herleitung gegenüber jener von Lohr zu liegen.

11. W. Glaser und P. Schiske—Wien (vorgetragen von P. Schiske). **Achsennahe Elektronenbewegung im zylindersymmetrischen Magnetfeld nach der Wellenmechanik.**

Die Annahmen der *Gaußschen* Dioptrik werden in die Wellenmechanik übersetzt. In der Dingenbene ist die Wellenfunktion vorgegeben, berechnet wird die Stromdichte in einer beliebigen Einstelebene. Das Näherungsverfahren gibt im ersten Schritt die *Fresnelsche* und *Fraunhofersche* Beugungstheorie, im zweiten Schritt einen verallgemeinerten Ansatz zur Beugungstheorie der Bildfehler.

12. W. Glaser und H. W. Franke—Wien (vorgetragen von H. W. Franke). **Richtungsdoppelfokussierung in elektrisch-magnetischen Feldern.**

Betrachtet man die zu einer kreisförmigen Elektronenbahn benachbarten Elektronenbahnen, die nicht in der Ebene des Kreises liegen, so hat man im allgemeinen zwei Fokussierungspunkte, also ein astigmatisches System. Die Bedingungen dazu, daß beide Fokussierungspunkte zusammenfallen, werden auf Strahlen benachbarter Geschwindigkeit und Masse ausgedehnt. Auf die Bedeutung der Anordnung für die Massen- und Geschwindigkeitspektrographie wird hingewiesen.

13. F. Trey—Leoben. **Unipolarität und Entspannung.**

Das unipolare Verhalten gleichrichtender Substanzen wird auf die Wirkung einer Sperrschicht zurückgeführt. Äußere und innere Sperrschichten



sind möglich und untersucht worden. Zur Zeit beschäftigt man sich hauptsächlich mit der inneren Sperrschicht. Um sie zu erzeugen, werden die Präparate meist auch erwärmt. Es wird gezeigt, daß vorher gepreßte Präparate durch Erwärmung unipolar und dabei gleichzeitig auch merklich entspannt werden. Vorhandene Spannungen verhindern die Bildung der Sperrschicht.

14. *L. Halpern* und *K. M. Koch*—Wien (vorgetragen von *K. M. Koch*).  
**Corbino-Effekt und magnetische Widerstandsänderung in Wismut.**

Die zuerst von *Ettingshausen* (Wien. Ber., Bd. XCV, II. Abt., S. 737, 1887) beobachtete zusätzliche Widerstandsänderung in einer kreisförmigen, radial vom Strom durchflossenen Wismutscheibe (Magnetfeld senkrecht zur Scheibenfläche), die mit dem Ausgleich der Hall-Spannung in Form des Corbino-Effektes in Zusammenhang gebracht werden muß, nimmt bei der Temperatur der flüssigen Luft so hohe Werte an, daß quantitative Vergleiche mit der Theorie möglich werden. Theoretische Überlegungen zeigen, daß diese Methode ein Kriterium dafür liefert, ob die gesamte Widerstandsänderung im Magnetfeld auf einen elektronenphysikalischen Mechanismus zurückgeführt werden kann oder auch andere Mechanismen angenommen werden müssen.

Samstag, 9. Dezember 1950, vormittag (Vorsitz *Urban Graz*,  
*Glaser*—Wien):

15. *F. Seidl* Wien. **Verhalten von Flüssigkeiten während der Beschallung.**

a) Filmvorführungen: Beschallung zweier verschiedenen viskoser Flüssigkeiten mit gleicher Schallintensität, Herstellung einer Emulsion, Konkavspiegel und Konvexspiegel bei variiert Frequenz im Schallwellenfeld einer Flüssigkeit.

b) Kurzaufnahmen vom Flüssigkeitssprudel einer beschallten Flüssigkeit.

16. *F. Regler* Wien. **Röntgenographische Untersuchung über Magnetostraktion an Elektrolyteisen.**

Röntgen-Feinstrukturuntersuchungen an Elektrolyteisenproben im unmagnetisierten und magnetisierten Zustand zeigen eine Zunahme der Halbwertsbreite und eine Abnahme der Netzebenenabstände der (013)-Ebenen im magnetisierten Zustand.

17. *O. Kratky* Graz. **Teilchengrößen-Bestimmungen an Metallsolen mittels der Röntgen-Kleinwinkelmethode.**

An Goldsolen mit Mandelöl als Dispersionsmittel werden Teilchengrößenbestimmungen mittels der Röntgen-Kleinwinkelmethode vorgenommen, u. zw.: 1. Nach dem bekannten Verfahren aus der Form der Kleinwinkelkurve. An einem Beispiel wird ein Durchmesser von  $104 \text{ \AA}$  erhalten. 2. Nach einem bisher noch nicht verwendeten Verfahren durch Messung des Verhältnisses von gebeugter und primärer Intensität. Am gleichen Sol wird ein Verhältnis von  $1,48 \cdot 10^{-4}$  gemessen, aus dem sich bei einer Goldkonzentration von  $0,25 \text{ mg/g}$  Sol eine Teilchengröße von  $109 \text{ \AA}$  ergibt. Der fast innerhalb der Fehlergrenzen liegende Unterschied ist auf Polydispersität zurückzuführen.

18. *H. Hinteregger* Wien. **Mikrophotometer mit Vakuumzelle und Wechselstromverstärkung.**

Die Vakuumphotozelle arbeitet nicht im Gleichspannungsbetrieb mit Anodenbatterie, sondern (ähnlich einer Verstärkerröhre) mit ca. 700 Hz, 1 V<sub>eff</sub>.

im steilsten Teil ihrer Strom-Spannungskennlinie, wobei die Belichtung als Steuerparameter betrachtet werden kann. Auf diese Weise konnte mit einem Wechselstromverstärker auch bei starken Plattenschwärzungen ein Tintenschreiber oder stabiles Voltmeter noch voll angesteuert werden.

19. *L. Breitenhuber* Graz. **Über Hohlraummeßverfahren zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante.**

Nach einer Einleitung über die Bedeutung der Dielektrizitätskonstanten im Ultrakurzwellengebiet bei der Bestimmung von Dipolmomenten wird eine Einteilung der Meßverfahren in Verstimmungsmethoden und in solche, welche bei konstanter Senderfrequenz arbeiten, getroffen. Die sogenannte Stäbchenmethode eignet sich für schnelle Messungen mäßiger Genauigkeit. Für die eingangs genannten Anwendungen ist die sogenannte Grenzhöhenmethode zu empfehlen. Der Meßakt besteht hier im wesentlichen in einer Volumbestimmung der in den Hohlraum eingebrachten Probe.

20. *E. Schwarz-Bergkampff* Leoben. **Ableitung von Modellgesetzen für die typischen Strömungsarten und ihre Anwendung in der Technik.**

Für die typischen Strömungsarten und -formen werden die allgemeinen Beziehungen zwischen den Grundkenngrößen entwickelt. Aus diesen wenigen Beziehungen und dem konstanten Verhältnis von strömender Stoffmenge und an die Wandung abgegebener Wärmemenge werden die Modellbeziehungen herausgesucht, die wirklich ähnliche Bau- und Betriebsverhältnisse ergeben. — Es wird gezeigt, daß z. B. die verschiedenen Größen und Leistungen technischer Öfen den entsprechenden Modellen gut folgen.

21. *H. Reuter* — Wien. **Die Vorhersage der nächtlichen Temperaturminima auf Grund physikalischer Methoden.**

Die große Anzahl der am nächtlichen Abkühlungsprozeß beteiligten Faktoren bringt es mit sich, daß sowohl im theoretischen Ansatz als auch in der praktischen Anwendung der Ergebnisse Vereinfachungen unumgänglich sind. Die Vereinfachungen müssen nach theoretischen und praktischen Gesichtspunkten durchgeführt und gerechtfertigt werden, was schließlich zu einer semiempirischen Lösung des Problems führt, die sich in der Praxis jedoch weitgehend bewährt, wie an Hand von Beobachtungsmaterial von Wien gezeigt wird.

22. *K. Lang* Wien. **Zur Eigendruckverbreiterung von Neon-Spektrallinien.**

Messungen des Verfassers haben ergeben, daß die Halbwertsbreiten aller untersuchten Neon-Spektrallinien proportional mit der Gasdichte wachsen. Im allgemeinen ist der Proportionalitätsfaktor für die einzelnen Linien nicht sehr verschieden, dagegen zeigen die Linien, die durch Kombination eines beliebigen Terms mit dem Term  $1s_2$  entstehen, bei Drucksteigerung eine wesentlich größere Zunahme der Halbwertsbreite als die übrigen Linien.

Samstag, 9. Dezember 1950, nachmittag (Vorsitz *Steinmaurer*—Innsbruck, *Regler*—Wien):

23. *H. Nowotny* Wien. **Über anomal diamagnetische Phasen.**

Neben den bekannten Beispielen anomal diamagnetischer Phasen wie Graphit und Wismut beanspruchen die sogenannten *Hume-Rothery*- $\gamma$ -Phasen aus diesem Grunde ein erhöhtes Interesse. Mit einer nach *Weiß-Foëx* abgewandelten Apparatur wurden zahlreiche derartige Metallverbindungen

untersucht, und es zeigte sich dabei, daß fast sämtliche anomal diamagnetisch sind. Folgende Systeme wurden gemessen: Cu-Zn, Cd, Hg; Ag-Zn, Cd; Au-Zn; Ni-Zn, Cd; Pd-Zn, Cd; Pt-Zn, Cd; Mn-Zn; Cu-Si, Sn; Ag-Al. Es ergeben sich bemerkenswerte Regelmäßigkeiten, die durch elektronische Eigenschaften solcher Strukturen gedeutet werden können und in Übereinstimmung mit theoretischen Überlegungen nach *Pauling* und *Ewing* stehen. Ein ausführlicher Bericht ist in den Monatsh. Ch. veröffentlicht.

#### 24. P. Urban—Graz. Über die Streuung schneller Elektronen.

Eine neue experimentelle Überprüfung der *Mott*schen Theorie durch *W. Bothe* wird an Hand der verschiedenen Streuformeln erörtert. Die durch numerische Methoden 1948 von *Feshbach* und *McKinley* hergeleitete Streuformel unterscheidet sich von der alten *Mott*schen Formel nur um den Faktor  $(1 - \sin \vartheta)$  im Relativitätsterm, welcher innerhalb der Fehlergrenzen nicht zu unterscheiden ist. Die Grenze der Leistungsfähigkeit der *Dirac*schen Theorie ist daher noch nicht erreicht.

#### 25. E. Ledinegg—Graz. Das Eingreifen der Gruppentheorie bei Behandlung des quantenmechanischen Mehrkörperproblems.

Nach einem kurzen Überblick über die Hauptaufgaben der Gruppentheorie bei der Behandlung quantentheoretischer Problemstellungen wird die anzuwendende Methode bei Durchführung der Störungsrechnung erster Ordnung am Beispiel der linearen Atomkette näher auseinandergesetzt. Mittels weniger Sätze, welche aus der Darstellungstheorie, der linearen Algebra sowie der Theorie orthogonaler Funktionensysteme entnommen sind, gelingt die Berechnung der Energieterne in einfacher und übersichtlicher Weise.

#### 26. O. Burkard—Graz. Lunare Gezeiten in der obersten Atmosphäre.

Die kritische Frequenz  $f_0 F_2$ , die an der bekannten Station Huancayo seit Jahren stündlich beobachtet wird, wurde auf das Vorhandensein eines mondentägigen Ganges hin untersucht. Wie die lunaren Schwankungen, die bei den Komponenten des Erdmagnetfeldes auftreten, ergab sich auch hier ein luni-solarer Gang, bei dem die doppelte mondentägige Periode nur tagsüber, nicht aber in der Nacht vorhanden ist. Das für einen solchen Fall von *Chapman* aufgestellte Phasengesetz ist auch im vorliegenden Falle erfüllt. Ein ausführlicher Bericht erscheint im J. Atmosph. Terr. Phys.

#### 27. F. C. Roesler—Graz. Über gewisse Intensitätsfragen der Theorie der Raman-Streuung.

Um die Temperaturabhängigkeit der Intensität von frequenzverschobener Streustrahlung zu verstehen, muß man außer der Änderung des Wirkungsquerschnittes der einzelnen Streuer auch ihre Wechselwirkung berücksichtigen. Man kommt dann in Übereinstimmung mit bisher nicht gedeuteten Experimenten zum Ergebnis, daß bei Flüssigkeiten und Festkörpern als Streumедien die Intensität rotverschobener Linien mit steigender Temperatur abnehmen dürfte.

#### 28. E. Broda und E. Giegerl—Wien. Die Emission langsamer Neutronen durch Radium-Beryllium-Quellen.

Aktivierungsquerschnitte für schnelle Neutronen sind gewöhnlich viel kleiner als für langsame Neutronen. Deshalb können Experimente mit schnellen Neutronen leicht verfälscht werden, wenn die Quelle auch langsame Neutronen emittiert. Die Emission durch Radium-Beryllium-Mischung wurde gemessen, indem geeignete Sonden (Dysprosium, Indium, Jod) mit und ohne Absorber aktiviert wurden, die langsame Neutronen bestimmter Energien selektiv abfangen. Die Emission im Bereich 0–100 eV ergab sich

zu etwa  $1 \text{ sec}^{-1} \text{eV}^{-1} \text{mC}^{-1}$ , beträgt also nur einen sehr kleinen Bruchteil der Gesamtemission. Die langsamen Neutronen entstammen wahrscheinlich dem Kernprozeß  ${}^9_4\text{Be} (\alpha, n) {}^3_2\text{He}$  statt dem vorwiegenden Prozeß  ${}^9_4\text{Be} (\alpha, n) {}^{12}_6\text{C}$ .

Die folgenden Inhaltsangaben betreffen Vorträge, die wegen Verhinderung der Verfasser nicht gehalten werden konnten oder die zur Vermeidung einer Überlastung der Tagesordnung von vornherein zurückgestellt worden waren:

29. *K. Desoyer* Wien. Über neuartige Wirkungen eines magnetischen Drehfeldes auf freischwebend suspendierte beleuchtete Eisenpartikeln.

Die Teilchen werden vom Drehfeld in stationären Kreisbahnen geführt. Diese Bahnen verhalten sich bezüglich Änderungen der Lichtintensität wie die Kreisbahnen, die im Licht allein entstehen. Sie zeigen teils nord-, teils südmagnetisches Verhalten.

30. *W. Glaser*—Wien. Probleme der Elektronenoptik.

1. Das Vereinigungsgebilde der Elektronenstrahlen im Bildraum bei der Abbildung eines Punktes ist im allgemeinen im Rahmen der geometrischen Optik eine komplizierte Fläche, die nur in erster Näherung als ein Bildpunkt aufgefaßt werden kann. Die Gestalt dieser Kaustikfläche wurde in einer gemeinsamen Arbeit mit *H. Grumm* berechnet und für eine typische Magnetlinse maßstabgerecht im Gipsmodell dargestellt. 2. Die genaue Intensitätsverteilung des Elektronenstromes im Bildraum muß nach der Wellenmechanik berechnet werden. 3. Die Kenngrößen von Elektronenlinsen können aus einem Eigenwertproblem berechnet werden.

31. *W. Glaser* und *O. Bergmann* Wien. Zusammenhang zwischen licht-optischer und elektronenoptischer Abbildungsgleichung.

Der Zusammenhang zwischen Ding- und Bildort sowie die Vergrößerung sind in der Elektronenoptik für starke Linsen durch kompliziertere Funktionen gegeben als in der Lichtoptik, wo wir von einer „*Newtonschen* Abbildungsgleichung“ sprechen wollen. Die allgemeine elektronenoptische Abbildungsgleichung wird in der Umgebung zweier konjugierter Punkte durch die „oskulierende *Newtonsche* Abbildung“ bis zu Gliedern von der vierten Ordnung genau approximiert. Die oskulierenden Kardinal-elemente sind im allgemeinen für jedes konjugierte Punktpaar verschieden. Ist das nicht der Fall, dann gehört das Abbildungsfeld zur Klasse der „*Newtonschen* Felder“. Beispiele solcher Felder können angegeben werden.

32. *W. Glaser* und *H. Hammerschmid* Wien. Berechnung optischer Kenngrößen elektrostatischer Linsen.

Optische Konstanten starker elektrostatischer Linsen, wie sie im elektrostatischen Elektronenmikroskop verwendet werden, sollen als Funktion der Voltgeschwindigkeit, der Linsenspannung und der geometrischen Linsenparameter berechnet werden. Eine Voraussetzung dazu ist die analytische Darstellung des Feldverlaufes in derartigen Linsen, die gleichfalls behandelt wird.

33. *W. Glaser* und *J. Hoberstorfer* Wien. Über die Bildfehler elektronen-optischer Ablensysteme.

Analog zur *Gaußschen* Dioptrik ist bei größeren Ablenkungen eines Elektronenstrahlbündels in Fernsehröhren weder die Ablenkung streng proportional dem Ablenkstrom und der Ablenkspannung noch bleibt der punktförmige Lichtfleck auch im abgelenkten Zustand punktförmig. Es werden Ablensysteme untersucht, für welche diese „Ablenkfehler“ möglichst klein werden.



34. *W. Glaser und H. Robl* -Wien. **Über streng durchrechenbare elektrostatische Abbildungsfelder.**

Für bestimmte Achsenpotentiale von rotationssymmetrischen elektrostatischen Feldern, die dem Potentialverlauf in Rohrlinsen nahekommen, werden strenge Lösungen der Differentialgleichung der achsennahen Elektronenbahnen angegeben. Die optischen Eigenschaften entsprechender Elektronenlinsen werden besprochen.

35. *W. Glaser und E. Streichsbier* Wien. **Berechnung elektronenoptischer Kenngrößen starker Magnetlinsen im Wege der Ritzschen Methode.**

Für Magnetlinsen vom erweiterten Glockenfeldtypus  $B = B_0 \cdot (1 + (z/a)^2)^n$ , welche den Feldverlauf in verschiedenen Polschuhlinsen sehr gut wiedergeben, wird die Methode der Berechnung der optischen Kenngrößen als Eigenwertproblem explizite durchgeführt.

36. *R. F. K. Herzog* Wien. **Elektronenoptische Abbildungseigenschaften von homogenen transversalen magnetischen Feldern.**

Es wurde früher theoretisch gezeigt, daß auch transversale homogene Magnetfelder die Abbildungseigenschaften sphärischer Linsen besitzen können, wenn die Form der Polschuhe entsprechend gewählt wird. Dieses theoretische Resultat wird nun einer eingehenden experimentellen Prüfung unterzogen. Die bisherigen Ergebnisse werden besprochen und es zeigt sich gute Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen.

37. *M. J. Higsberger* Wien. **Über einen Impuls-Massenspektrographen.**

Es wird ein Spektrograph vorgeschlagen, der eine Absolutmassenbestimmung gestattet, wo sämtliche Massen innerhalb einer bestimmten vorgegebenen Fläche liegen. Ein weiterer Vorteil dieses Apparates liegt in der strengen Überprüfbarkeit des Experimentes durch die Theorie. Auf die verschiedenartige Anwendung, besonders zur Untersuchung radioaktiver Strahlungen, wird hingewiesen.

38. *O. Preining* Wien. **Quantitative Untersuchungen über Magnetophophorese an Silberstahl und Nickel.**

Unter Magnetophophorese versteht man die von *F. Ehrenhaft* entdeckte Eigenschaft in Luft suspendierter metallischer Probekörper, sich in magnetischen Feldern kommutierbar zu bewegen. Bei der Untersuchung der Erscheinung gelang es, die Ergebnisse von *N. Judenberg*, *W. Niklas* und *L. Steipes* mit einer exakteren Apparatur bekannter Restremanenz (3% des Erdmagnetfeldes) zu reproduzieren. Ferner konnte ein neuer Teilchentyp, der der „Veränderlichen“, gefunden werden. Diese zeigen die Eigenschaft, daß sich ihr magnetophophoretisches Verhalten nach Behandlung mit starken Magnetfeldern ändert.

39. *J. Schedling* Wien. **Größenbestimmung kugelförmiger Objekte im Mikroskop.**

Der Durchmesser kugelförmiger Objekte wird durch die Abbildung im Mikroskop verfälscht, er erscheint gegenüber Messungen des Durchmessers nach anderen Methoden als zu groß. Der Betrag der Durchmesserungsvergrößerung und seine Abhängigkeit vom Radius der untersuchten Objekte wurde bestimmt. (Eine ausführlichere Darstellung wurde bereits den A. P. A. eingereicht.)

40. *A. Smekal* Graz. **Eigenschaften der bisher kürzestwelligen Ultraschallvorgänge in Festkörpern ( $10^{10}$  Hz).**

Durch mechanische oder chemische Oberflächenbehandlung von Kristallen oder Gläsern gelingt es bei sprödem Stoffverhalten, in Raumteilen mit Durchmessern von etwa  $1 \mu$  Eigenspannungen hervorzubringen, deren

Auslösung elastische Rückfederung und dadurch Emission von Ultraschall-Stoßwellen bewirkt. In den quasi-isotropen Silikatgläsern erfolgt die Ausbreitung kugelförmig und mit normaler Transversalwellengeschwindigkeit, wobei längs Wegen von mehreren Millimetern keine wesentliche Dämpfung erfolgt. Die Wellen zeigen normale Reflexion und Brechung, können anisotrope Intensitätsverteilungen aufweisen und durchkreuzen einander störungsfrei. Anzeichen für unternormale und für longitudinale Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind vereinzelt aufgetreten, doch konnten solche Fälle nicht willkürlich reproduziert und dadurch endgültig gesichert werden.

#### 41. A. Smekal Graz. **Optische Absorption von Gitterversetzungen in Salzkristallen.**

Die Erscheinungen der Kristallplastizität werden auf einzelne Gitterversetzungsschritte zurückgeführt, für die verschiedene mit Schwierigkeiten behaftete Modellvorstellungen gebräuchlich sind. Da keineswegs alle bekannten Kristalle Gleitebenen-Plastizität aufweisen, ist es fraglich, ob ein allgemeiner, von der Gitterstruktur und der Natur der Bindekräfte unabhängiger Grundvorgang überhaupt bestehen kann. — Experimentell gesehen, entspricht jeder Gitterversetzung eine lokalisierte Deformations- und Spannungsspitze, die in durchsichtigen Kristallen mit nachweisbaren Veränderungen des langwelligen Abfalles der starken Eigenabsorption verbunden sein muß und überdies eine selektive Elektronenanlagerungs-Absorption besitzen kann. Beide Typen von spektroskopischen Effekten sind in eigenen früheren Arbeiten an Steinsalzkristallen gefunden und näher untersucht worden. Der Grundvorgang der Gleitebenen-Plastizität dieser Salzkristalle ist danach an das Vorhandensein einzelner Gitterlücken geknüpft, womit die Temperaturabhängigkeit der Plastizität gasfreier Kristalle in guter Übereinstimmung steht. (Zuerst vorgetragen am 15. Oktober 1949 auf dem *Ewald Meeting* der American Physical Society in Brooklyn, N. Y.)

#### 42. A. Smekal—Graz. **Über die Struktur des glasigen Selen.**

Nach Röntgenmessungen von *Hendus* besitzt jedes Atom im kristallisierten und im glasigen Selen zwei nächste Nachbarn, dagegen vier zweitnächste Nachbarn im Kristallgitter und acht zweitnächste Nachbarn im Glaszustand. Die für beide Formen charakteristischen langgestreckten Atomketten müssen also verschiedene Gestalt und verschiedene gegenseitige Anordnung besitzen, wobei letztere für den amorphen Zustand nur als Nahordnung eine regelmäßige sein kann. Da im Glase Elektronenbewegung über größere Strecken ausgeschlossen ist, sollte die Änderung der Bindungsverhältnisse zumindest auf einen Fortfall der metallischen Bindungskomponente des Selengitters zurückführbar sein. Ferner wird durch den am Selenglas gefundenen Bereich von Gummielastizität eine gewinkelte Form der Atomketten nahegelegt, während sie im Kristallgitter schraubenförmig ist. Man findet, daß beide Forderungen erfüllbar sind und eine befriedigende Wiedergabe der erwähnten Nahordnung des Selenglases ermöglichen.

#### 43. A. Smekal Graz. **Zeitliche Auflösung der Dynamik des Zerreißvorganges spröder Körper.**

Die Zerreißspannung zahlreicher Festkörper ist bei sprödem Stoffverhalten im Einzelversuch scharf definiert und im Mittel über gleichartige Proben mit der Versuchsgeschwindigkeit in gesetzmäßiger Weise veränderlich. Der Vorgang muß demnach von der Versuchsgeschwindigkeit beeinflusst sein, bei der Zerreißspannung aber so rasch verlaufen, daß dann keine merkliche Beanspruchungszunahme mehr stattfindet. Daraus folgt, daß der Bruch bereits vor dem Erreichen der Zerreißspannung beginnt und durch die weitere Beanspruchungssteigerung beschleunigt wird, was in anderer Form auch durch die Erscheinungen der Zeitfestigkeit gefordert erscheint. Der

gefolgerte zeitliche Verlauf konnte durch Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Bruchvorganges in zylindrischen Silikatglasstäben bestätigt werden. Das anfängliche Anwachsen der Bruchgeschwindigkeit hängt ab von den Probeneigenschaften, dem umgebenden Medium, der Temperatur und der Versuchsgeschwindigkeit; die hohe Endgeschwindigkeit der Bruchfortpflanzung dagegen ergibt sich stets unveränderlich und stellt praktisch eine reine Stoffkonstante dar. Der Probendurchmesser hat keinen unmittelbaren Einfluß auf den Zeitverlauf des Bruchvorganges, ist jedoch für die Feinstruktur der Bruchflächen maßgebend, die mit den die Bruchausbreitung begleitenden elastischen Wellenvorgängen zusammenhängt.

44. *E. Votava* Wien. **Qualitative und quantitative Untersuchung der schraubenförmigen Bewegung von Eisen- und Silberstahlpartikeln im magnetischen Felde.**

Die von *F. Ehrenhaft* gefundene schraubenförmige Bewegung von in Luft suspendierten metallischen Probekörpern im magnetischen Felde wurde untersucht und gefunden, daß sie von der Lichtintensität und der magnetischen Feldstärke abhängt, dagegen nicht vom elektrischen Ladungszustand der Probekörper. Untersuchungen von *H. Danan* ergaben, daß die kinetische Energie der Probekörper auf ihrer schraubenförmigen Bahn bei Änderung der magnetischen Feldstärke von 2—400 Gauß annähernd konstant bleibt. (Eine ausführlichere Darstellung wurde bereits den A. P. A. eingereicht.)

45. *P. M. Weinzierl* Wien. **Untersuchungen an Betastrahlern mittels der Trochoidenmethode.**

Die Intensitätsverteilung der Strahlung von  $Ra(B+C)$  und  $Ra(D+E)$  im inhomogenen Randfeld zweier zylindrischer Polschuhe wird photographisch untersucht. Die mit Absorbern bedeckten Filme zeigen teilweise Strahlungskonzentrationen, welche hinsichtlich ihrer Gestalt und ihres Durchdringungsvermögens nicht mit den für Betapartikeln zu erwartenden Eigenschaften übereinstimmen.

## Buchbesprechungen.

**The Friction and Lubrication of Solids.** Von *F. P. Bowden* und *D. Tabor*. Mit 114 Textabb., XII, 337 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1950. Geb. 35 s. net.

In dem eben erschienenen Werke werden die physikalischen und chemischen Vorgänge beim Gleiten fester Körper aufeinander behandelt. Das erste Kapitel ist dem weiten Gebiete des Kontaktes zwischen Festkörpern gewidmet. Sämtliche Forschungsmethoden, wie optische Interferenz, elektronenoptische Methoden usw., werden hier erörtert. Auch der elektrische Widerstand als Maß des Kontaktes findet hier seinen Platz. Im zweiten Kapitel wird die Oberflächentemperatur von reibenden Festkörpern einer Untersuchung zugeführt und sowohl experimentell wie theoretisch alles Wissenswerte bereitgestellt. In den nächsten Kapiteln 3 bis 12 wird der Mechanismus der Reibung, soweit er für die Technik und allgemeine Physik von Bedeutung ist, behandelt. Man findet z. B. die Wirkung der Reibungswärme auf die Oberfläche, ferner den Mechanismus der metallischen Reibung, den Einfluß von reinen Oberflächen, die Reibung von Nichtmetallen usw., kurz eine sehr übersichtliche und ins einzelne gehende Behandlung des ganzen Fragenkomplexes. Am Schlusse wird noch auf die chemische Reaktion eingegangen, und diese Vorgänge bei Reibung werden vom Standpunkte des Chemikers untersucht. Abschließend findet man noch eine Tabelle wichtiger Reibungszahlen, wie man sie für den praktischen Gebrauch nötig hat.

Das Werk stellt eine wichtige Ergänzung für die heutige praktische Literatur des Physikers dar, da gerade dieses Gebiet bis jetzt nur von reinen Technikern behandelt wurde.

*P. Urban, Graz.*

**The Development and Future of Nuclear Energy.** Von *Sir John Cockcroft*. 23 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1950.

Der bekannte Atomphysiker, Leiter der größten englischen Forschungsanstalt für die Gewinnung der Atomenergie in Harwell, gibt zuerst einen Überblick über die historische Entwicklung der Atomphysik, mit besonderer Berücksichtigung der Atomkerne. Hierauf gibt er einen interessanten Ausblick auf die zukünftige Entwicklung dieses heute so aktuellen Zweiges der modernen Physik.

*P. Urban, Graz.*

**Astronomy of Stellar Energy and Decay.** Von *M. Johnson*. Mit 22 Textabb., 4 Bildtafeln, 216 S. London: Faber and Faber Limited. 1948. Geb. 16s. net.

Zu den klassischen Zweigen der Astronomie ist um die Jahrhundertwende als neues Forschungs- und Wissensgebiet die Astrophysik dazugekommen. Mit der Atomphysik, bzw. Quantenphysik enge gekoppelt, hat die Astrophysik die gleiche stürmische Entwicklung erfahren wie die Physik der Elementarteilchen.

Während jedoch die Atomphysik und insbesondere die Physik der Atomhülle zu einem gewissen Abschluß kommen konnte, ist dies bei der Astrophysik infolge ihrer viel weiter gesteckten Ziele und ihres heterogenen Aufbaues noch lange nicht der Fall. Es ist daher nicht verwunderlich, wenn



es bis vor kurzem keine lehrbuchartigen Darstellungen oder für den Nichtfachmann allgemeinverständliche Bücher der Astrophysik gegeben hat.

Der Verfasser des vorliegenden Buches hat sich mit Erfolg bemüht, die angedeutete Lücke mehr in Richtung der populärwissenschaftlichen Schriften zu schließen, und versucht, einen Überblick über das Gesamtgebiet der modernen Astrophysik zu bringen. Die auf den ersten Blick unglaublich erscheinenden Erkenntnisse des Astrophysikers über den inneren Aufbau und der Energiebilanz ferner Sonnen sowie der Struktur des Universums, welche mittels spektralanalytischen Methoden bis auf viele zehntausend Lichtjahre reichende Weiten erschlossen werden konnten, werden hier anschaulich entwickelt und, soweit es ohne tiefere Vorkenntnisse möglich ist, dem Verständnis nähergebracht. Das Buch ist in zwei Hauptteile gegliedert, deren erster über die Methoden und modernen Ergebnisse der Astrophysik berichtet, während der zweite Teil etwas tiefer, aber ohne eingehende mathematische Ableitungen auf die Probleme des ersten Abschnittes Bezug nimmt. Besonders hervorheben möchte ich das hier behandelte Problem der Energieerzeugung durch Kernreaktionen mittels der C-N-Gruppe, welche quantitativ nach modernen Anschauungen (*Bethe*) zumindestens auf unserer Sonne die H-H-Reaktion bei weitem übertrifft.

Das Buch ist flüssig geschrieben und vermittelt dem naturwissenschaftlich interessierten Leser eine ausgezeichnete Einführung auf dem Gesamtgebiet der Astrophysik.

E. Ledinegg, Graz.

**Die Erkenntnis und ihre Leistung.** Die naturwissenschaftliche Methode.

Von B. Juhos. VI, 262 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 57.—, sfr. 16.50, \$ 3.80, DM 16.—.

Die Erkenntnislogik versteht unter einem Satz ein sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann. Die Sätze zerfallen in logische (analytische) und empirische (synthetische) Sätze. Während die systematische Untersuchung der analytischen Sätze, die Gegenstand der analytischen Wissenschaften Logik und Mathematik sind, weit fortgeschritten ist, sind die Eigenarten der empirischen Sätze bisher ziemlich vernachlässigt worden. Ihre erkenntnislogische Prüfung ergibt, daß jedes empirische Satzsystem auf einem Fundament von empirischen Sätzen bestimmter Art ruht und im weiteren Aufbau nach erkenntnislogisch scharf getrennten Stufen empirischer Satzarten gegliedert ist.

Grundlegend für die Logik empirischer Sätze ist die Unterscheidung zwischen empirisch-nichthypothetischen und empirisch-hypothetischen Sätzen. Die ersteren (Konstatierungen) unterscheiden sich von allen anderen empirischen Sätzen dadurch, daß sie nie als Irrtum aufgefaßt werden können. Sind sie falsch, dann sind sie Lügen. Konstatierungen behaupten das Vorliegen von Erlebnissen und können nur in der phänomenalen (psychologischen), nicht in der physikalischen Raumzeitsprache ausgedrückt werden. Die empirisch-hypothetischen Sätze hingegen sind nachprüfbar (verifizierbar) und können als Irrtum bezeichnet werden, wenn sie falsch sind. Sie gliedern sich in drei Stufen. Die unterste Stufe bilden die singulären Sätze. Sie treffen einen einzelnen bestimmten Fall und lassen die Voraussage zu, daß wir unter bestimmten Bedingungen zu bestimmten Konstatierungen gelangen (Vorausagen nullter Stufe). Die nächsthöheren Sätze sind die Gesetze erster Stufe. Wir gewinnen sie durch den Ansatz einer Geltungsbeziehung zwischen singulären Sätzen. Sie bezeichnen eine unter gleichen oder ähnlichen Umständen sich stets wiederholende Ereignisfolge und nehmen auf die zu ihrer Gewinnung benützten Ereignisse explizite Bezug. Sie gestatten nur Voraussagen erster Stufe, d. h. es kann nur behauptet werden, daß bei Wiederkehr gleicher Umstände sich jene Ereignisfolgen wiederholen werden, die zur Gewinnung des Gesetzes herangezogen wurden. Die höchste Stufe der empirisch-hypothetischen Sätze sind die Gesetze zweiter Stufe. Sie beschreiben die stetige Ordnung von Ereignisreihen und nehmen auf die zu ihrer Gewinnung be-

nützten Ereignisse nicht explizite Bezug. Aus ihnen sind Voraussagen zweiter Stufe ableitbar, d. h. sie behaupten nicht nur die Geltung der zu ihrer Gewinnung benützten endlich vielen, sondern darüber hinaus auch die Geltung unendlich vieler, untereinander durch eine stetige Ordnung verknüpfter Gesetze erster Stufe.

Die erkenntnislogische Zergliederung der vor allem in den Naturwissenschaften geltenden Sätze und Gesetze ermöglicht dem Verfasser, eine Reihe philosophischer Grundfragen aufzurollen und neu zu formulieren, wie Kausalität, Determinismus, Wahrheit und Wirklichkeit, Raum und Zeit, Wahrscheinlichkeit, psychophysischer Parallelismus, Form und Inhalt usw., und sich dabei mit Erkenntnistheoretikern, Logikern und Physikern kritisch auseinanderzusetzen. Obwohl ihm die physikalische Erkenntnis als das Ideal aller empirischen Erkenntnis gilt, lehnt er die Bestrebungen entschieden ab, die darauf abzielen, die physikalische Raumzeitsprache als die wissenschaftliche Einheitssprache einzuführen und die psychologisch-phänomenale Sprache in die physikalische zu übersetzen. Dadurch müßte die Wissenschaft auf die Beschreibung wichtiger Tatsachen verzichten, was nicht zulässig ist.

Juhos' Erkenntnislogik ist ein sehr scharfsinniges und geistvolles Werk, das durch die Herausarbeitung des grundlegenden Unterschiedes zwischen empirisch-nichthypothetischen und empirisch-hypothetischen Sätzen — wir könnten auch sagen: zwischen psychologischen Erlebnisaussagen und physikalischen Gesetzen — in der Tat zahlreiche umstrittene Fragen der allgemeinen Wissenschaftslehre zu klären vermag. Das Buch hätte freilich manche Kürzungen vertragen. In dem Bestreben, die sprachlogischen Unterschiede zwischen den verschiedenen Formen der Erfahrungsaussagen bis in die letzten Konsequenzen durchzudenken, wiederholt sich der Verfasser häufig und gelangt dadurch zu einer ermüdenden Breite. Man hat den Eindruck, daß er befürchtet, nicht richtig verstanden zu werden, weshalb er die gleichen Gedanken wiederholt ausspricht, um sie recht eindrucksam und unmißverständlich zu machen. Dennoch ist das Werk für den Physiker schwer lesbar, obwohl er die meisten Beispiele aus der Physik wählt und verschiedene theoretische Fragen, wie z. B. die nach der Notwendigkeit der beiden Konstanten  $c$  und  $h$ , sehr klar darstellt. Der Philosoph tut sich natürlich viel leichter, vermißt aber z. B. bei der Behandlung des Wahrscheinlichkeitsproblems eine Auseinandersetzung mit *Meinongs* grundlegendem Werk „Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit“ und stellt fest, daß eine rein sprachlogische Erörterung des psychophysischen Parallelismus kaum etwas zur Lösung des Problems selbst beiträgt. Der Psychologe würde etwa die Frage der intersubjektiven Verständlichkeit von Erlebnissätzen in seiner Sprache viel einfacher und überzeugender ausdrücken und hier wie an manchen anderen Stellen des Buches die Unentbehrlichkeit einer phänomenalen gegenüber der raumzeitlichen Wissenschaftssprache begründen können. Daß aber Juhos' Werk überhaupt von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet und gewertet werden kann, beweist seinen grundlegenden Charakter, weshalb sich die Physiker, Philosophen und Psychologen in seine Gedankengänge vertiefen sollten.

O. Tumlirz, Graz.

**Einführung in die Gesteinskunde.** Von H. Leitmeier. Mit 100 Textabb., VIII, 275 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 58.—, sfr. 19.—, S 4.40, DM 18.50.

Auf einen kurzen allgemeinen Teil über die petrographischen Untersuchungsmethoden (17 Seiten) läßt der Verfasser in altbewährter Weise in drei Hauptabschnitten die Erstarrungsgesteine (111 Seiten), die Sedimentgesteine (52 Seiten) und die Metamorphite (84 Seiten) folgen. Ein Kapitel über die Mylonite (3 Seiten) beschließt das Buch. In jedem Kapitel sind meist recht kurz die allgemeinen Tatsachen mitgeteilt, und dann wird wesentlich ausführlicher auf die Besprechung der einzelnen Gesteinstypen eingegangen, z. B. bei den Erstarrungsgesteinen 35 Seiten Allgemeines und 76 Seiten Einzelbesprechung. So wird wohl derjenige, der nicht schon über eine

gewisse, auch praktische Erfahrung in der Kristalloptik verfügt, die entsprechenden Seiten über die optischen Untersuchungsmethoden in der Einleitung kaum mit Erfolg lesen können. Dasselbe gilt auch, um noch ein Beispiel anzuführen, mutatis mutandis für die chemisch-physikalischen Grundlagen. Diese Tatsache ist dem Verfasser sehr wohl bekannt, wie im Vorwort auseinandergesetzt wird. Leider mußten jedoch aus einem ursprünglichen Manuskript gerade diese allgemeinen Teile gekürzt werden, um den Umfang des Buches nicht allzu groß werden zu lassen.

Der Verfasser hat es aber verstanden, an die allgemeine Problematik heranzuführen und gerade jene Teile entsprechend darzustellen, über die man sich derzeit kaum in Handbüchern, sondern nur in der Spezialliteratur orientieren kann, z. B. die Granitisation.

Die Einzelbesprechungen der Gesteine weisen eine Reihe von Vorteilen auf. Einmal bekommt der mit der Materie weniger Vertraute einen Ausschnitt aus der verwirrenden petrographischen Nomenklatur, der ihm das Wichtige von weniger Bedeutendem trennen hilft. Außerdem ist unter den angeführten Beispielen den ostalpinen, bzw. österreichischen Vorkommen ein breiter Raum zugewiesen, so daß der Kenner dieser Gegenden immer wieder an Bekanntes erinnert wird oder doch leicht die Möglichkeit hat, die Beispiele in der Natur zu studieren. Die berühmten sonstigen Beispiele kommen dabei nicht zu kurz.

Im ganzen kann das Buch den Studierenden, die von den verschiedenen Richtungen her auf petrographische Probleme stoßen, als Studienbehelf durchaus empfohlen werden. Aber auch andere, die sich über eine gesteinskundliche Frage oder über ein bestimmtes Gestein orientieren wollen, werden mit Erfolg das Buch zu Rate ziehen können. Zweifellos hat damit das Buch eine Lücke, die bestand, ausgefüllt.

Druck und Ausstattung sind einwandfrei. Ein ausführliches Inhaltsverzeichnis ist beigegeben.

*H. Heritsch, Graz.*

**Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker.** Von *E. Lohr*. Zweite Auflage, mit einem Nachtrag. Mit 34 Textabb., XV, 488 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. Geb. DM 24.—.

Die vorliegende zweite Auflage des bekannten Lehrbuches der Vektorrechnung zeigt einige wesentliche Ergänzungen gegenüber der ersten Auflage. So sind, neben kurzen Bemerkungen über den Zusammenhang der sphärischen Trigonometrie mit der Vektorrechnung, über Ableitungen in krummlinigen Koordinaten, Reihenentwicklungen usw., insbesondere die Gebiete: Ebene Vektorrechnung und Funktionentheorie, Vektorrechnung der speziellen Relativitätstheorie und Grundzüge des mathematischen Formalismus der *Diracschen* Theorie des Elektrons neu hinzugekommen. Das Werk bietet eine übersichtliche und ins Tiefe gehende Darstellung des so wichtigen Wissenszweiges und ist daher speziell für jeden theoretischen Physiker eine wertvolle Stütze.

*P. Urban, Graz.*

**Die Grundlagen der Mechanik.** Von *G. Mie*. VII, 80 S. Stuttgart: F. Enke Verlag. 1950. DM 6.50.

Der bekannte Physiker hat in dankenswerter Weise den Versuch unternommen, die Grundbegriffe der Mechanik, welche seiner Meinung nach in den meisten Lehrbüchern nicht genügend präzisiert sind, möglichst scharf zu formulieren. Insbesondere wird der Kraftbegriff einer kritischen Prüfung unterzogen. Das Büchlein, welches Zeugnis von einer oft sehr eigenwilligen Auffassung des Verfassers ablegt, fordert manchmal den Widerspruchsgeist des Lesers heraus und regt damit sehr zum Nachdenken an.

*E. Ledinegg, Graz.*

**Naturwissenschaft, Religion, Weltanschauung.** Arbeitstagung des Gmelin-Institutes für anorganische Chemie und Grenzgebiete in der Max-



Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften. 421 S. Clausthal-Zellerfeld: Gmelin-Verlag G. m. b. H. 1949.

1948 führte das Gmelin-Institut für anorganische Chemie in Clausthal eine Arbeitstagung durch, der das Thema Naturwissenschaft, Religion, Weltanschauung zugrunde lag. Die gehaltenen Vorträge und Diskussionsbemerkungen liegen nun gesammelt vor. Vorweggenommen sei, daß die Lektüre des Buches vor allem deswegen reizvoll und anregend ist, weil wirklich alle nur denkbaren Richtungen zu Worte kommen: vom katholischen Dogmatiker bis zum Vertreter des dialektischen Materialismus, vom geisteswissenschaftlich eingestellten Philosophen über den theoretischen Physiker bis zum Biologen und Grundlagenforschung treibenden Arzt. Man nimmt daher gern eine gewisse, unter solchen Umständen wohl unvermeidliche Inhomogenität der Vortragssammlung in Kauf. In diesem Zusammenhang sei eine kleine Unterlassung angemerkt, die bei einer Fortsetzung der „Clausthaler Gespräche“ leicht gutgemacht werden könnte. Es wäre nämlich sehr nützlich gewesen, den Leser über den wissenschaftlichen und weltanschaulichen „background“ der einzelnen Sprecher, die er unmöglich *alle* kennen kann, zu unterrichten. Daß die Denkweise und die Ergebnisse der modernen Physik zu einer Neubahnung des Gespräches mit den Vertretern der Philosophie und Religion geradezu herausfordern, liegt nahe genug. So vielseitig aber auch die Standpunkte auf der weltanschaulichen Seite sein mögen, so scheint doch der Gedanke vorzuherrschen, daß die Hauptaufgabe darin bestehen muß, die *Grenzen* der verschiedenen Bereiche von hüben und drüben abzustecken. Nur unter dieser Voraussetzung ist eine für alle Teile fruchtbringende Verständigung möglich.

Es ist unmöglich, alle 22 gehaltenen Vorträge ihrem Gehalt entsprechend zu würdigen. *E. Pietsch* spricht einleitend über das Thema Vernunft und Glaube. *P. Jordan* behandelt Grundfragen der modernen Physik und Kosmogonie mit interessanten Hinweisen auf Stellen aus der älteren theologischen Literatur. Die Reihe der philosophisch betonten Darlegungen eröffnet *K. Zueiling* mit dem Vortrag „Dialektischer Materialismus und moderne Physik“, in dem er mit ziemlichem Aufwand zu beweisen bestrebt ist, daß Fragen der modernen Physik im Rahmen der materialistischen Denkweise eines *Engels* und *Lenin* eine befriedigende Deutung finden.

Die Beziehungen zwischen Physik und Biologie werden von *R. Kaplan* und *P. Jordan* in knapper, aber sehr prägnanter Weise abgehandelt. Sehr instruktiv ist ein Aufsatz von *L. Wendt*, der am Beispiel der Krebsentstehung die Bedeutung der mechanistischen und teleologischen Denkweise für die Problemfindung und Problemlösung in der Biologie erläutert. *A. Müller* zeigt, daß es Kategorien allgemeiner Art gibt, die sowohl in der Natur- als auch in der Geisteswissenschaft Gültigkeit haben. Daß in einem heutigen Gespräch zwischen Naturwissenschaft und Philosophie der Kausalbegriff eine hervorragende Rolle spielt, versteht sich von selbst. *R. Laun* und *R. Glauner* beschäftigen sich sehr ausführlich mit diesem Thema. Hier wird der Unterschied zwischen der philosophischen und rein naturwissenschaftlichen Denkweise besonders deutlich. Allgemeinere Probleme des Zusammenhanges von Philosophie und Naturwissenschaft werden in Vorträgen über die Bedeutung *Heraklits* für die geistige Lage der Gegenwart von *F. J. Brecht*, über Naturwissenschaft und Philosophie von *H. Remy*, über das Geltungsproblem als Fundament aller strengen Naturwissenschaften und das Irrationale von *H. Dingler* sowie über die Gegenwartsphilosophie und ihre Beziehungen zur Naturwissenschaft von *A. Wenzl* behandelt. Gerade der nichtphilosophisch geschulte Physiker wird aus diesen Abhandlungen eine Fülle von Anregungen gewinnen. Von besonderem Reiz, da im allgemeinen von den Denkgewohnheiten und -inhalten des Physikers weiter entfernt, sind die Ausführungen der Theologen. Hier geht es z. B. um den Begriff des Wunders oder um den Sinn eines Dogmas der katholischen Kirche. Mit Grundfragen setzt sich in diesem Zusammenhang der Vortrag „Voraussetzungslose Wissenschaft und



christlicher Glaube“ von *J. Hessen* auseinander. Besondere Aktualität hat die Abhandlung von *J. Ternus* „Christliches Dogma und Naturwissenschaft“, in der das überaus heikle Thema in einer für den Nichttheologen sehr instruktiven und anregenden Art behandelt wird. Den Standpunkt der evangelischen Kirche und der sogenannten freien Protestanten erläutern *G. Howe* und *H. D. Kahl*. Im Gegensatz zur vorherrschenden Tendenz einer klaren Scheidung zwischen dem naturwissenschaftlichen und religiösen Bereich steht ein Vortrag von *H. Lange*. Abgeschlossen wird die Reihe durch einen Vortrag von *A. Kotowski*, „Bewältigung der Wirklichkeit“, der sich noch einmal mit dem Grundsätzlichen der Tagung befaßt und vor allem auf die mögliche Zukunftsentwicklung eingeht.

Alles in allem ein wahrhaft kontrastreicher Querschnitt durch die Denkweisen unserer Zeit.

*W. Schwabl*, Wien.

**Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik.** Von *G. Oberdorfer*.

Zweite Auflage. Mit 64 Textabb. und 9 Tafeln, VI, 100 S. Wien: F. Deuticke. 1950. S 60.—.

Der bekannte Autor ist auch in der Neuauflage seines Buches über die Ortskurventheorie seinem pädagogischen Prinzip treu geblieben, welches durch klare Darstellung eines durch die Praxis abgegrenzten Stoffgebietes gekennzeichnet ist. Gleichzeitig vermittelt das Buch eine allgemeine Einführung auf dem Gesamtgebiete der Ortskurventheorie, so daß dieses als Nachschlage- und Lehrbehelf gleich gute Dienste leisten wird. Der Verfasser hat es bei aller Exaktheit der Darstellung verstanden, mit einem Minimum an mathematischen Hilfsmitteln auszukommen, und damit auch den Praktiker ermuntert, von den Methoden der Ortskurventheorie ausgiebiger Gebrauch zu machen. Es sei noch erwähnt, daß in der neuen Auflage einige früher nicht behandelte Kurven, wie die Kubik und die Quartik, aufgenommen wurden. Die vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten der Ortskurventheorie werden durch sorgfältig ausgewählte Beispiele aus der Wechselstromtechnik im letzten Kapitel des Buches besonders hervorgehoben.

*E. Ledinegg*, Graz.

**Space-Time Structure.** Von *E. Schrödinger*. Mit Textabb., VIII, 119 S. Cambridge: At the University Press. 1950. Geb. 12s. 6d. net.

In diesem Buche faßt Professor *Schrödinger* seine Arbeiten über das Raum-Zeit-Kontinuum zusammen, welche eine Verallgemeinerung der *Einsteinschen* Relativitätstheorie zum Gegenstand haben.

Es gliedert sich in drei Abschnitte: I. Übersicht über die Vektor-Tensor-Rechnung im Ausmaße des Nötigen. II. Affine Mannigfaltigkeiten, in welchem Abschnitte zuerst die invarianten Ableitungen und ihre Beziehungen behandelt werden, dann die Übertragung, der Krümmungstensor und die geodätischen Linien. Am Schlusse werden die allgemeinen geometrischen Hypothesen über die Gravitation abgehandelt. III. Metrisch zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Zuerst behandelt der Verfasser einige wichtige Beziehungen über metrische Affinitäten, dann die Bedeutung der Metrik nach der speziellen Relativitätstheorie und die Erhaltungssätze und Variationsprinzipien. Schließlich als Krönung des ganzen Werkes die Verallgemeinerung der *Einsteinschen* Theorie. Es gelingt dem Verfasser, auf verhältnismäßig kurzem Raume alles Wesentliche zu behandeln. Die Darstellung ist in souveränem Stil verfaßt, jenem Stil, den schon *Sommerfeld* „*Schrödinger-Stil*“ genannt hat. Die Wichtigkeit dieser Erscheinung braucht nicht besonders betont zu werden; jedem Physiker, der dieses Spezialgebiet der theoretischen Physik kennenlernen will, kann dieses Werk wärmstens empfohlen werden.

*P. Urban*, Graz.

**Regeltechnik.** Von *K. Seidl*. IV, 69 S. Wien: F. Deuticke. 1950. S 25.—.

Die Regeltechnik, welcher in fast allen technischen Disziplinen eine wichtige Rolle zukommt, verbindet die verschiedensten Zweige der tech-

nischen Wissenschaft miteinander. So verschieden auch äußerlich die Elemente sein mögen, welche zum Aufbau einer Regelstrecke benötigt werden, sind doch die prinzipiellen Gesichtspunkte in allen Fällen gemeinsam. Von diesem Standpunkt aus versucht der Verfasser in seinem Büchlein, dem Leser die Probleme der Regeltechnik auseinanderzusetzen. Einer späteren Auflage möge es vorbehalten bleiben, noch ausführlicher in dieses interessante Gebiet einzudringen.

*E. Ledinegg, Graz.*

**Warum Atomzertrümmerung?** Von A. K. Solomon. Ins Deutsche übersetzt von W. Flöttmann. Wien: E. Ratzenhofer.

Im Vorwort des Übersetzers meint dieser, daß im dritten Teil des Buches: „Warum zertrümmert man Atome?“, der Schwerpunkt der Ausführungen *Solomons* liegt. Insofern ist dies richtig, da das breite Publikum seit der Explosion der ersten Atombombe in Hiroshima dem Mechanismus der Uran-kernzertrümmerung — begreiflicherweise — lebhaftestes Interesse entgegenbringt. Doch ist vielleicht dieser Abschnitt dem Nichtfachmanne trotz seines sensationellen Inhaltes am schwersten verständlich und am wenigsten geeignet, das zu vermitteln, was *Solomon* offenbar beim Verfassen seines Buches angestrebt hat: eine dem Laien leicht verständliche und klare Darstellung unserer Kenntnisse vom Atomaufbau zu vermitteln, mit Berücksichtigung der Wirkungsweise aller wichtigeren Versuchsanordnungen und Apparate, die zur Kernerforschung dienen. Der Verfasser hat es besonders in den beiden ersten Abschnitten, „Was ist ein Atom?“ und „Wie zertrümmert man ein Atom?“, in ausgezeichnete Weise verstanden, den uns heute geläufigen Aufbau des Atoms gemeinverständlich zu entwickeln. *Solomon* präsentiert nicht die fertigen Ergebnisse, sondern versucht an Hand der historischen Experimente von *J. J. Thomson, Aston, Rutherford, Moseley* usw. den Leser von der Richtigkeit der von den Atomphysikern gezogenen Schlüsse zu überzeugen. Die im zweiten Abschnitt angeführten technischen Details über die Wirkungsweise moderner Zyklotrone sowie die im dritten Abschnitt behandelten Fragen der Konstruktion einer Uran-Atombombe werden auch den Fachphysiker interessieren. Die populäre Darstellung des verarbeiteten Stoffes verbürgt sicherlich einen großen Leserkreis.

*E. Ledinegg, Graz.*

**Reports on Progress in Physics.** Herausgegeben von A. C. Stickland. Band XIII. Mit Textabb., IV, 424 S. London: The Physical Society. 1950.

Der Überblick über die Fortschritte der Physik, welcher von der englischen Physikalischen Gesellschaft jährlich herausgegeben wird, liegt nunmehr vor. Eine detaillierte Besprechung dieser in jeder Hinsicht vorbildlichen und nachahmenswerten Einrichtung erübrigt sich. Es möge nur besonders darauf hingewiesen werden, daß der diesjährige Nobelpreisträger aus Physik, Professor *C. F. Powell*, einen zusammenfassenden Bericht über die letzten Neuigkeiten der Mesonentheorie veröffentlichte und auch die anderen Autoren alles Wesentliche der physikalischen Forschung übersichtlich zusammenstellten. Gerade für unsere physikalischen Forschungen sind Werke wie das vorliegende besonders wichtig, da die Kommunikation wissenschaftlicher Arbeit während des Krieges lang unterbrochen war. Es ist daher das vorliegende Werk ganz besonders den physikalischen Instituten und anderen wissenschaftlichen Forschungsstätten zu empfehlen.

*P. Urban, Graz.*

**Erzeugung und Messung von Hochvakuum, Aufbau und Betrieb von Hochvakuumaggregaten.** Eine kurze Einführung. Von *G. Wagner*. Mit 23 Textabb., V, 73 S. Wien: F. Deuticke. 1950. S 20.—.

Das vorliegende Büchlein gestattet dem Studierenden, sich rasch über die Möglichkeiten der Erzeugung sowie Messung von Hochvakuum zu orientieren. Daß gerade dieses Gebiet heute besondere Bedeutung erreicht hat, braucht nicht erst erwähnt zu werden. Jede Röntgenröhre, Radioröhre usw.



hängt von der Qualität des erzeugten Vakuums ab, so daß dieses Problem für die experimentelle Physik von großer Bedeutung ist. Das übersichtliche Werk, welches durch Tabellen und Schemata bereichert wird, kann jedem Studierenden der Physik wärmstens empfohlen werden. *P. Urban, Graz.*

**Ionization Chambers and Counters.** Von *D. H. Wilkinson*. (Cambridge Monographs on Physics. Herausgegeben von N. Feather und D. Shoenberg.) Mit 79 Textabb., XI, 266 S. Cambridge: At the University Press. 1950. Geb. 25s. net.

Seit mehr als zwanzig Jahren gehören die Ionisierungskammern und Zählgeräte zu den unentbehrlichsten Requisiten des Physikers. Das vorliegende Werk gibt einen Abriß dieser schon klassisch gewordenen Meßgeräte, welche vorwiegend die große Entwicklung der Kernphysik gefördert haben. Zuerst wird das Phänomen der Ionisierung speziell behandelt und alle jene Vorgänge erörtert, welche das Verhalten der Zähler bestimmen. Dann ist den einzelnen Typen speziell je ein Kapitel gewidmet. Am Schluß werden noch die Fehler und die statistische Auswertung einer Behandlung unterzogen. Ein ausführliches Literaturverzeichnis und ein übersichtliches Register sorgen für die schnelle Handhabung des Werkes, dessen Erscheinen eine Lücke in der Literatur ausfüllt und jedem modernen Physiker wärmstens empfohlen werden kann.

*P. Urban, Graz.*

### Berichtigung.

In der Arbeit „Die Veränderlichkeit der optischen Eigenschaften und die Glasstruktur“ von *Norbert J. Kreidl* [Acta Physica Austriaca 3, 405 (1950)] auf S. 411, 4. Zeile von oben lies: niedrigere statt: höhere und S. 412 an Stelle des zweiten Satzes lies: Wenn Thallium und Wismut, unter Verlust von ein und drei Elektronen, Ionen bilden, bleiben ebenfalls zwei ( $6S^2$ ) Elektronen außerhalb einer geschlossenen Achtzehnerschale.

**Inhaltsübersicht:** Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Inhaltsübersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerläßlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

**Abbildungen:** Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. ... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

**Tabellen:** Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

**Formeln:** Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzuwenden, also  $(a+b)/c$

statt  $\frac{a+b}{c}$  oder  $e - E/kT$  statt  $e - \frac{E}{kT}$ .

**Zitate** ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. Dempster, Nature 136, 180 (1935). Um Einheitlichkeit in den Abkürzungen der Zeitschriftenzitate zu erreichen, ist die Herausgabe eines Verzeichnisses geplant.

**Korrekturen:** Grundsatz muß angesichts der schwierigen Verhältnisse in der ganzen Drucklegung sein, daß sich der Autor, der seine Abhandlung veröffentlicht sehen will, stillschweigend verpflichtet, ebensoviel Sorgfalt, wie er für Literaturstudium, Rechnungen, Beobachtungen aufwendet, auch für die Niederschrift seiner Ergebnisse und die anschließende Korrekturarbeit aufzubringen; auch dann, wenn er seine Interessen bereits wieder anderen Problemen zugewendet hat.

**Herausgeber, Schriftleitung und Verlag**



*Soeben erschien:*

## **Grundlagen der Atomphysik**

Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik und Quantenstatistik

Von

**Dr. phil. Hans Adolf Bauer**

Professor an der Technischen Hochschule und der Universität in Wien

Vierte, umgearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage

Mit 244 Textabbildungen. XX, 631 Seiten. 1951

In Leinen geb. S 186.—, DM 45.—, \$ 10.70, sfr. 46.—

Wissenschaftliche Strenge und Beschränkung auf das Wesentliche, verbunden mit einer so ausführlichen Darstellungsweise, daß auch der mit dem mathematischen Rüstzeug der modernen Physik weniger vertraute Leser instand gesetzt wird, in die schwierige Materie einzudringen: das sind die Vorzüge, die dem Werk bisher seinen hervorragenden Platz in der Fachliteratur verschafft haben. Die nunmehr erschienene vierte Auflage spiegelt in ihrem stattlichen Mehrumfang die gewaltige Entwicklung der Atomphysik in den letzten Jahren wider.

---

*Soeben erschien:*

## **Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit**

Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung

Von

**Richard von Mises**

Professor an der Harvard-Universität

Dritte, neubearbeitete Auflage. IX, 278 Seiten. 1951

S 78.—, DM 18.—, \$ 4.30, sfr. 18.50

---

*Soeben erschien:*

**M<sup>me</sup> Curie: Pierre Curie.** Autorisierte deutsche Ausgabe von *Anna Kerschagl*, Wien. VII, 89 Seiten. 1950

S 18.—, DM 4.20, \$ 1.—, sfr. 4.30

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria